Ігор КАЛАШНІКОВ,

доцент кафедри алгебри і методики навчання математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, консультант КУ «Центр професійного розвитку педагогічних працівників Вінницької міської ради»

Розвиток навичок моделювання в учнів на прикладі побудови системи цілих чисел

Натуральні числа є фундаментом, на якому чисто конструктивним шляхом будуються інші числові системи. Зокрема, система цілих чисел,яка є розширенням системи натуральних чисел.

Розширення системи натуральних чисел потрібне з практичних міркувань. В новій системі має завжди виконуватись операція віднімання, яку не завжди можна виконати в натуральних числах. І ще, розширення потрібно виконати так, щоб це стало основою для побудови інших, нових числових систем.

Сформулюємо загальні вимоги розширення числових множин.

Нехай А — числова система, що розширюється, В — числова система, яка є розширенням системи А, а *A*, *B*, — відповідні їм базові множини. Систему В вважатимемо розширенням системи А, якщо матимуть місцетакі умови:

1. $A \subset B$, $A = B$.

2. Основні операції, відношення та їхні властивості, що мають місцев системі А, повинні мати місце і в системі В, причому їхній зміст для елементів із *A*, які уже розглядаються як елементи з *B*, повинен співпадати з тим змістом, який вони мали в системі А до її розширення.

3. У системі В повинна виконуватися операція, яка в системі А була частковою виконуваною, або невиконуваною.

4. Числова система В, яка є безпосереднім розширенням числової системи А, повинна бути мінімальною серед всіх розширень системи А, що задовольняють вимогам 1 — 3, та визначаються системою А однозначно, з точністю до ізоморфізму.

При побудові моделі цілих чисел, придумали використовувати поняття впорядкованої пари натуральних чисел.

До цього приводять такі міркування. У випадку, коли віднімання натуральних чисел *a* і *b* можливе, тобто $a > b$, то пара $(a; b)$ може задавати деяке натуральне число, тоді парою $(b; a)$ можна буде задати протилежнечисло до заданого натурального числа з нової множини.

Назва «протилежне» з'явилася ще й тому, що компоненти пари помінялись місцями напроти один одного.

Парою з однаковими першою та другою компонентами, напевно, може задаватися нейтральний елемент відносно операції додавання, а саме 0. Наприклад, натуральне число 1, можна задати парами натуральних чисел: (2; 1), (3; 2) і т. д.

Пари (1; 2), (2; 3), і т. д. визначатимуть протилежне до одиниці число, позначати його можна символом, наприклад, –1, придумали новий символ.

Оскільки деяке ціле число задає не одна пара, а деяка множина пар, то виникає завдання зібрати ці пари разом, кажуть в один клас еквівалентних пар. Розбити множину пар натуральних чисел на класи можна завдяки відношенню еквівалентності, яке можна задати так:

$(a; b)\ (c; d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$

Тобто пари (1; 8) і (3; 10) задають одне і те саме число «–7».

Тепер у множині цілих чисел, яку ми задаємо як пари натуральних чисел введемо операцію додавання, але спочатку означимо поняття суми.

✓ **Означення.** Сумою двох цілих чисел $\alpha \leftarrow (a; b)$ і $\beta \leftarrow (c; d)$ називає- ться ціле число $\alpha \oplus \beta \leftarrow (a; b) \oplus (c; d) = (a + c; b + d)$, де $a, b, c, d \in$ N.

До формулювання цього означення була пророблена певна робота з натуральними числами, наприклад, два натуральних числа 2 і 3 задали парами: (3; 1) і (5; 2), шляхом оперування з компонентами пар виконуваною в натуральних числах операцією «+» прийшли до пари (3+5; 1+2)=(8; 3) → 5, яка задає число 5. Перевіривши на інших цілих числах, де операцію можна інтерпретувати в інший спосіб, (фінансові операції, зміна температури на термометрі,...) переконуємось, що озна чення суми двох цілих чисел працює.

Ви напевно помітили, що знак «+» взято в кружечок? Це потрібно для того щоб відрізнити введену, нову операцію над парами, від аналогічної операції, яку ми звикли бачити в натуральних числах.

✓ **Означення.** Операція, яка ставить у відповідність двом цілим числамїх суму називається додаванням.

Означивши так операцію додавання, інтерпретація її на термометрі та на фінансових операціях набуває іншого змісту. Учень розуміє суть операції додавання цілих чисел глибше, розуміє, як це влаштовано. Зовсім інакше учні усвідомлюють і доведення таких теорем:

Теорема 1. Операція додавання цілих чисел є асоціативною, тобто:

$(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Z})(\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma).$

Теорема 2. В множині цілих чисел існує нейтральний елемент, тобто:

$(\forall \alpha \in \mathrm{Z})(\exists \theta \in \mathrm{Z})(\alpha \oplus \theta = \theta \oplus \alpha = \alpha).$

Теорема 3. В множині цілих чисел для будь-якого числа існує протилежне, тобто:

$(\forall \alpha \in \mathrm{Z})(\exists (-\alpha) \in \mathrm{Z})(\alpha \oplus (-\alpha) = -\alpha \oplus \alpha = \theta).$

Теорема 4. Операція додавання цілих чисел є комутативною, тобто:

$(\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Z})(\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha).$

Теорема 5. Операція додавання цілих чисел володіє властивістю ско-рочення, тобто:

$(\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Z})(\alpha \oplus \gamma = \beta \oplus \gamma \rightarrow \alpha = \beta).$

Ці теореми тепер можна строго довести, виходячи з означення суми.

Аналогічно вводять операцію множення цілих чисел.

Доцільно пропонувати учням придумати означення добутку самостійно. Були випадки коли учні знаходили пару, що відповідає добутку двох цілих чисел.

✓ **Означення.** Добутком двох цілих чисел $\alpha \leftarrow (a; b)$ і $\beta \leftarrow (c; d)$ назива-ється ціле число $\alpha \odot \beta \leftarrow (a; b) \odot (c; d) = (ac + bd; ad + bc)$, де $a, b, c, d \in$ N – довільні натуральні числа.

Звісно, до формулювання цього означення також була пророблена певна робота з натуральними числами, наприклад, два натуральних числа 2 і 3 задали парами: (3; 1) і (5; 2), шляхом оперування з компонентами пар виконуваними в натуральних числах операціями «+» і «» приходимо до пари

$(3\cdot5+1\cdot2; 3\cdot2+1\cdot5)=(17; 11) \rightarrow 6$, що задає число 6. Перевіривши на інших цілих числах, де операцію можна інтерпретуватив інший спосіб, (як правило, фінансові операції) переконуємось, що означення множення двох цілих чисел працює.

$-2\cdot(-3) \leftarrow (1;3)\cdot(1;4)=(1\cdot1+3\cdot4; 1\cdot4+3\cdot1)=(13;7) \rightarrow 6.$

✓ **Означення.** Операція, яка ставить у відповідність двом цілим числамїх добуток називається множенням.

Введена так операція множення дає можливість вчителю обґрунтувати учням, чому працюють мнемонічні правила: «плюс помножити на мінус дає мінус», «мінус помножений на плюс дає мінус», «мінус помно жений на мінус дає плюс». Звісно, демонструвати все це потрібно на конкретних прикладах.

Ознайомившись з матеріалом наведеним вище, учні інакше розумітимуть теореми 6 — 10 справедливість яких вони раніше розуміли інтуїтивно.

Теорема 6. Операція множення цілих чисел володіє властивістю асоціативності, тобто:

$(\forall\alpha,\beta,\gamma \in Z)(\alpha\odot(\beta\odot\gamma)=(\alpha\odot\beta)\odot\gamma).$

Теорема 7. Відносно операції множення в множині цілих чисел існує нейтральний елемент, тобто:

$(\forall\alpha \in Z)(\exists\varepsilon \in Z)(\alpha\odot\varepsilon=\varepsilon\odot\alpha=\alpha)$

Теорема 8. Операція множення цілих чисел є дистрибутивною відносно операції додавання, тобто:

$(\forall\alpha,\beta,\gamma \in Z)(\alpha\odot(\beta\oplus\gamma)=\alpha\odot\beta\oplus\alpha\odot\gamma).$

Теорема 9. Операція множення цілих чисел є комутативною, тобто:

$(\forall\alpha,\beta \in Z)(\alpha\odot\beta=\beta\odot\alpha).$

Теорема 10. Операція множення цілих чисел є скоротною, тобто:

$(\forall\alpha,\beta,\gamma \in Z)(\alpha\odot\gamma=\beta\odot\gamma \rightarrow \alpha=\beta).$

Ці теореми також вже легко можна довести.

З вище вказаного можна зробити висновок, що пропонувати учням конструювати вже відомі людству математичні об'єкти є досить корисним завданням для розвитку їх конструктивного мислення.

Навчившись моделювати математичні об'єкти на уроках математики, учні зможуть застосовувати дані навички в майбутньому.

Список використаних джерел:

1. Числові системи: навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / укл. М.О. Медведєва, В.В. Ефендієв – Умань : УКВПП.– 2017. – 153 с.