

**Розв'язання завдань I (районного) етапу
Всеукраїнської олімпіади з математики
в Україні та у місті Києві
(2025–2026 навчальний рік)**

*«Ставлення держави до вчителя – це державна політика,
яка свідчить або про силу держави, або про її слабкість».
Отто фон Бісмарк*

6 клас

6–1. Підлога в величезній залі була складена з плиток 1×1 трьох кольорів, білого, сірого та чорного, як це показано на рис. 1. Квадратним килимом 100×100 були накриті рівно 10000 таких плиток. Скільки серед них могло бути сірих? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 1250.

Розв'язання. Розглянемо довільний квадрат підлоги 4×4 , при будь-якому його розташуванні в ньому рівно 2 сірі клітинки, а тому в квадраті 100×100 таких квадратів рівно 625, а тому сірих плиток там буде рівно $625 \cdot 2 = 1250$.

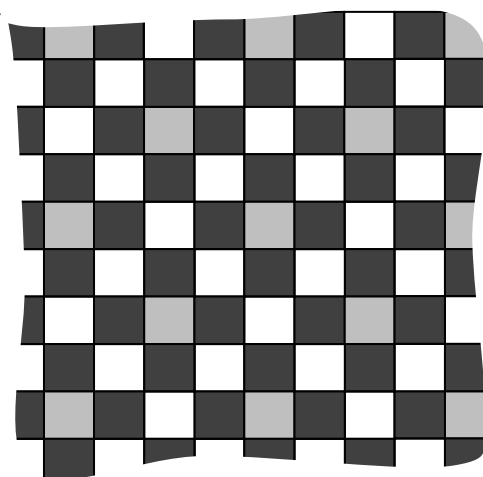


Рис. 1

6–2. Петрик в прикладі на множення двоцифрових чисел замінив цифри буквами: однакові – однаковими, різні – різними. В нього вийшла така рівність: $KY \cdot IV = VVV$. Якими могли бути множники KY та IV ? Вкажіть усі можливі варіанти.

Відповідь: $KY = 37, IV = 15$ та $KY = 21, IV = 37$.

Розв'язання. Розкладемо на множники число $VVV = V \cdot 3 \cdot 37$. Зрозуміло, що $V \geq 4$, бо інакше не можна отримати добуток двох двоцифрових чисел.

При $V = 4$ єдиний варіант $12 \cdot 37 = 444$ – умову не задовольняє.

При $V = 5$ єдиний варіант $15 \cdot 37 = 555$ – умову задовольняє, $KY \cdot IV = 37 \cdot 15$.

При $V = 6$ єдиний варіант $18 \cdot 37 = 666$ – умову не задовольняє.

При $V = 7$ єдиний варіант $21 \cdot 37 = 777$ – умову задовольняє, $KY \cdot IV = 21 \cdot 37$.

При $V = 8$ два варіанти $24 \cdot 37 = 888$ – умову не задовольняє, та $12 \cdot 74 = 888$ – умову не задовольняє.

При $V = 9$ єдиний варіант $27 \cdot 37 = 999$ – умову не задовольняє.

6–3. Розглянемо дату 16 січня 1091 року, тобто 16.01.1091 на звичайному електронному годиннику, яка виглядає, як на рис. 2. Якщо перевернути годинник догори дригом, то на годиннику буде зображена та сама дата 16.01.1091. Яка найближча дата від сьогодні, коли буде справджуватися та сама властивість, тобто дата на годиннику та на годиннику догори дригом однакова? Нагадаємо, що цифри 0, 1, 2, 5 та 8 переходять в себе, 6 та 9 переходять одна в одну.

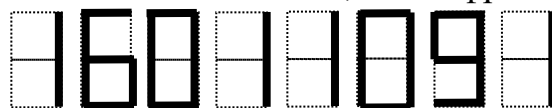


Рис. 2

Відповідь: 5 лютого 2050 року.

Розв'язання. Проаналізуємо цифри, які переходять в

себе або в інші цифри при перегортанні. Цифри 0, 1, 2, 5 та 8 переходять в себе, 6 та 9 переходять одна в одну, а цифри 3, 4 та 7 не можуть бути використані в шуканій даті.

Почнемо пошук з року 20 **, де $** \geq 25$. Таким чином однаковими мають бути записи $A = **** 20 *$ та $B = ** 02 ****$. Перші дві цифри числа B не перевищують 29. Останні дві цифри числа A не менше за 25. Якщо A закінчується на 25, 26, 28 та 29, то ці значення не можуть при перегортанні стати першими двома цифрами числа B . Таким чином третя цифра року гарантовано більша за 2. Але тоді це може бути для найменшої діти тільки 5. Найменший можливий рік – це 2050, а це відповідає даті 05.02.2050, тобто 5 лютого 2050 року.

6–4. Петрик зірвав з дерева 756 вишень. Він ділить їх порівну між собою і своїми друзями. Однак троє з них не дуже голодні і повертають Петрику четверту частину отриманих вишень. Петрик дуже зголоднів і швидко з'їв свої вишні, а також усі повернуті йому вишні. При цьому він порахував, що сам з'їв щонайменше 150 вишень. Скільки вишень він з'їв? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 189.

Розв'язання. Нехай разом з Петриком було n друзів, тут очевидно, що n – дільник кількості зібраних вишень: $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$. Кожний отримав по $\frac{756}{n}$ вишень. Ця величина має ділитися на 4. Значить n є дільником числа $3^3 \cdot 7 = 189$. Тоді Петрик отримав таку кількість вишень:

$$\frac{756}{n} + \frac{3}{4} \cdot \frac{756}{n} = \frac{7}{4} \cdot \frac{756}{n} = \frac{1323}{n} \geq 150 \Rightarrow n \leq \frac{1323}{150} \Rightarrow n \leq 8.$$

Оскільки $n \geq 4$, то єдина можливість для кількості друзів – це $n = 7$. Таким чином Петрик з'їв рівно $\frac{1323}{7} = 189$ вишень.

6–3.1. У кожній вершині квадрата записали число «+1» або «−1». На кожному кроці ми міняємо числа у кожній вершині на добуток трьох чисел: числа, що записане в самій вершині, та двох чисел, що записані в сусідніх по стороні вершинах. При яких початкових розстановках чисел ми зможемо отримати квадрат, у кожній вершині якого записане число «+1»? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: якщо з самого початку усі числа в вершинах дорівнюють 1.

Розв'язання. Позначимо числа у вершинах квадрата при початковій розстановці a_1, a_2, a_3 та a_4 , а також позначимо через $p = a_1 a_2 a_3 a_4$. Тоді на наступному кроці замість чисел a_1, a_2, a_3 та a_4 будуть стояти числа pa_3, pa_4, pa_1 та pa_2 . Тут ми використали те, що $a_i^2 = 1$ для усіх a_i . Таким чином, якщо на попередньому кроці не усі числа a_1, a_2, a_3 та a_4 , мали однаковий знак, то вони не матимуть однаковий знак і на наступному кроці. Якщо з самого початку усі числа дорівнюють (−1), то для цього набору $p = a_1 a_2 a_3 a_4 = 1$, а тому і наступний набір чисел дорівнюватиме так само числам (−1). Таким чином, щоб у певний момент отримати усі числа 1, то й на попередньому кроці ми мали так само усі числа 1. Таким чином усі числа з самого початку мали б дорівнювати 1.

6–4.1. Відомо, що число x задовольняє рівності: $(3x + 2)(7 - 4x)(4x + 7) = 0$. Яке найбільше значення може приймати вираз $5 - \frac{3}{x}$?

Відповідь: $\frac{19}{2}$.

Розв'язання. Оскільки добуток дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли принаймні один з множників дорівнює 0. Тому x треба розглянути три випадки.

Випадок 1. $3x + 2 = 0$, тоді $x = -\frac{2}{3}$, звідси $5 - \frac{3}{x} = 5 - 3 : \left(-\frac{2}{3}\right) = 5 + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$.

Випадок 2. $7 - 4x = 0$, тоді $x = \frac{7}{4}$, звідси $5 - \frac{3}{x} = 5 - 3 : \left(\frac{7}{4}\right) = 5 - \frac{12}{7} = \frac{23}{7}$.

Випадок 3. $4x + 7 = 0$, тоді $x = -\frac{7}{4}$, звідси $5 - \frac{3}{x} = 5 - 3 : \left(-\frac{7}{4}\right) = 5 + \frac{12}{7} = \frac{47}{7}$.

Найбільшим є значення $\frac{19}{2}$.

7 клас

7–1. Петрик задумав двоцифрове число, далі він додав до цього числа 36. В результаті цифри числа, що задумав Петрик, помінялися місцями. Скільки усього є чисел, що задовольняють такі умови? Самі числа наводити не треба, тільки кількість.

Відповідь: 5.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення заданої рівності:

$$10a + b + 36 = 10b + a \Rightarrow 36 + 9a = 9b \Rightarrow b = 4 + a.$$

Бачимо, що таких чисел усього 5 для $a = 1, 2, 3, 4$ та 5: 15, 26, 37, 48 та 59.

7–2. Всередині білого квадрату зі стороною 7 розташований сірий квадрат. Чому дорівнює сторона сірого квадрата, якщо відомо, що площа частини білого квадрата, що не закрита сірим у 3 рази більша за площу сірого квадрата?

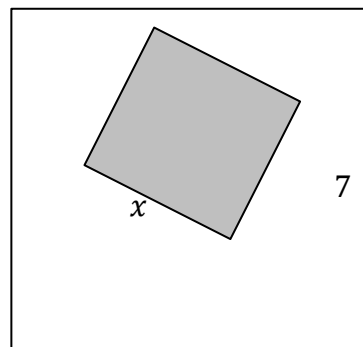


Рис. 3

Відповідь: $\frac{7}{2}$.

Розв'язання. Позначимо сторону сірого квадрата через x . Тоді площа білого квадрата 49, площа сірого – x^2 (рис. 3). Звідси задана умова записується таким чином:

$$49 - x^2 = 3x^2 \Rightarrow 4x^2 = 49 \Rightarrow x^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

7–3. Розглянемо дошку 9×9 , клітинки якої зафарбовані в чорний і білий кольори як на рис. 4. Дозволяється робити такі ходи: вибирається довільний квадрат 2×2 цієї дошки і в цьому квадраті 2×2 кожна біла клітинка стає червоною, кожна червона – чорною і кожна чорна – білою. Чи можна за скінченну кількість таких кроків отримати дошку, в якій кожний чорний квадрат початкового розфарбування стає білим, а кожний білий квадрат – чорним?

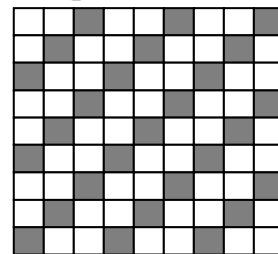


Рис. 4

Відповідь: не можливо.

Розв'язання. Якщо колір квадрата змінюється 3 рази, то він повертається до початкового кольору. Тому для кожного квадрату будемо рахувати зміну кольорів за модулем 3, тобто 0, 1 чи 2 рази. Щоб була можливість вказаного перефарбування треба, щоб кожний чорний квадратик має мати 1 зміну кольору, а кожний білий – має 2 зміни. Кожний квадрат 2×2 будемо ідентифікувати за лівим верхнім її квадратиком. Розглянемо лівий стовпчик дошки. Оскільки верхній квадрат є білим, то цей квадрат 2×2 має змінити колір 2 рази. Другий зверху квадрат цієї колонки так само білий, тому відповідний квадрат 2×2 має змінити колір 0 разів, бо він вже став чорним після змін кольору квадрату 2×2 , що відповідає лівий верхній клітинці. Далі в першому стовпчику чорна клітина, тому цей квадрат змінює колір 1 раз, під нею – біла, треба додатково змінити колір квадрату 2×2 1 раз, далі знову 1 раз, для шостої клітинки, яка чорна – 0 разів. Після цього біла клітинка – змінює 2 рази, а під нею знову біла – змінюємо 0 разів. Але тоді нижня чорна клітинка колір не змінює, що й завершує доведення.

7–4. Нехай m та n – натуральні числа, $a_1, a_2, \dots, a_m$ та $b_1, b_2, \dots, b_n$ – два набори чисел з однаковими сумами, тобто $a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Доведіть, що існує таблиця $m \times n$, у кожній комірці якої стоїть таке число, що для усіх $1 \leq i \leq m$ сума чисел i -го рядка дорівнює a_i , а для усіх $1 \leq j \leq n$ сума чисел j -го стовпчика

дорівнює b_j .

Розв'язання. Наведемо приклад заповнення чисел в таку таблицю. Нехай

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_m = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

та $s = a_m + b_n - S$. Заповнимо таблицю таким чином:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & & 0 & a_2 \\ & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & a_{m-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & s \end{bmatrix}$$

Суми усіх рядків та стовпчиків окрім останніх умову задовольняють. Знайдемо суму чисел останнього рядка:

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + s &= (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + a_m + b_n - S = \\ &= (b_1 + b_2 + \dots + b_n) + a_m - S = S + a_m - S = a_m. \end{aligned}$$

Аналогічно сума чисел в останньому стовпчику дорівнює b_n .

7–3.1. На колі розташовано 4 сині точки, 3 жовті, 2 червоні та 1 чорна точка. Скільки можна побудувати попарно різних трикутників, у яких дві вершини мають однаковий колір, а третя вершина – інший колір? Наприклад, попарно різних трикутників з усіма синіми вершинами є рівно 4.

Відповідь: 65.

Розв'язання. Якщо трикутник має 2 сині вершини, то їх можна вибрати 6 способами, третю вершину можна вибрати $3 + 2 + 1 = 6$ способами, тобто разом таких трикутників буде $6 \cdot 6 = 36$.

Якщо трикутник має 2 жовті вершини, то їх можна вибрати 3 способами, третю вершину можна вибрати $4 + 2 + 1 = 7$ способами, тобто разом таких трикутників буде $3 \cdot 7 = 21$.

Якщо трикутник має 2 червоні вершини, то їх можна вибрати одним способом, третю вершину можна вибрати $4 + 3 + 1 = 8$ способами, тобто разом таких трикутників буде $1 \cdot 8 = 8$.

Інших варіантів не існує, тому разом маємо $36 + 21 + 8 = 65$ таких трикутників.

7–4.1 Дарина зібрала букет, що містить білі та червоні троянди, білі та червоні гвоздики. Одна третина білих квітів – троянди, 75% червоних – гвоздики, 60% усіх квіток – білі. Скільки відсотків від усіх квітів становлять гвоздики?

Відповідь: 70.

Розв'язання. Нехай білих квітів буде $3a$, тоді там a троянд та $2a$ – гвоздики. Червоних квітів буде $4b$, з яких b – троянд та $3b$ – гвоздики. Крім того $4b : 3a = 2 : 3$ або $2b = a$. нам треба знайти відсоток гвоздик, тобто відношення $(2a + 3b) : (3a + 4b)$. Далі зробимо такі перетворення:

$$\frac{2a + 3b}{3a + 4b} = \frac{4b + 3b}{6b + 4b} = \frac{7b}{10b} = \frac{7}{10}.$$

Таким чином гвоздик є 70%.

8 клас

8–1. Для натурального числа n через $n!$ позначимо добуток $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. На скільки нулів закінчується вираз $\frac{2025!}{2000!}$?

Відповідь: 6.

Розв'язання. Кількість нулів наприкінці числа

$$\frac{2025!}{2000!} = 2001 \cdot 2002 \cdot \dots \cdot 2025$$

очевидно залежить від кількості множників 5 в його розкладі на прості множники. Порахуємо їх.

$$2005 = 5 \cdot 401, 2010 = 5 \cdot 402, 2015 = 5 \cdot 403, 2020 = 5 \cdot 404, 2025 = 5 \cdot 5 \cdot 81.$$

Таким чином шукана кількість цифр 0 наприкінці числа дорівнює 6.

8–2. У матері є 7 яблук, 6 груш та 5 апельсинів. Вона хоче розділити їх між двома дітьми так, щоб кожна дитина отримала по 9 фруктів. Скількома різними способами це можна зробити? Якщо якась дитина отримує різну кількість деякого з видів фруктів, то такий розподіл вважається різним.

Відповідь: 36.

Розв'язання. Першій дитині можна дати від 0 до 6 груш і від 0 до 5 апельсинів. Не враховуючи умову, що вона повинна отримати загалом 9 фруктів, існує загалом $7 \cdot 6 = 42$ можливості дати груші та апельсини. Можливості, коли перша дитина отримує більше 9 груш та апельсинів, а також ті, де перша дитина отримує менше 2 груш та апельсинів, не задовольняють умові. Порахуємо кількості цих випадків. Є 3 варіанти, коли загальна кількість груш та апельсинів більше 9: $6 + 4$, $5 + 5$ та $6 + 5$. Також є 3 варіанти, коли загальна кількість груш та апельсинів менше 2: $0 + 0$, $0 + 1$ та $1 + 0$. Таким чином, існує $42 - 3 - 3 = 36$ чинних можливостей.

8–3. Заданий квадрат $ABCD$ зі стороною 1. На сторонах AB та AD вибрані точки P та Q відповідно таким чином, що периметр $\triangle APQ$ дорівнює 2. Яке найбільше значення може приймати за таких умов величина $\angle PCQ$?

Відповідь: 45° .

Розв'язання. Побудуємо таку точку E на промені AD за точку D , щоб $CE = CP$, тоді $\triangle DCE = \triangle BCP$ (рис. 5). Звідси випливає, що

$$\angle ECP = \angle ECD + \angle DCP = \angle BCP + \angle DCP = 90^\circ.$$

Розглянемо відрізок

$$EQ = ED + DQ = BP + DQ = (1 - AP) + (1 - AQ) = 2 - AP - AQ = PQ.$$

Таким чином $\triangle QCE = \triangle QCP$ за трьома сторонами. Звідси випливає, що $\angle ECQ = \angle QCP$. Якщо врахувати, що $\angle ECQ + \angle QCP = \angle ECP = 90^\circ \Rightarrow \angle QCP = 45^\circ$.

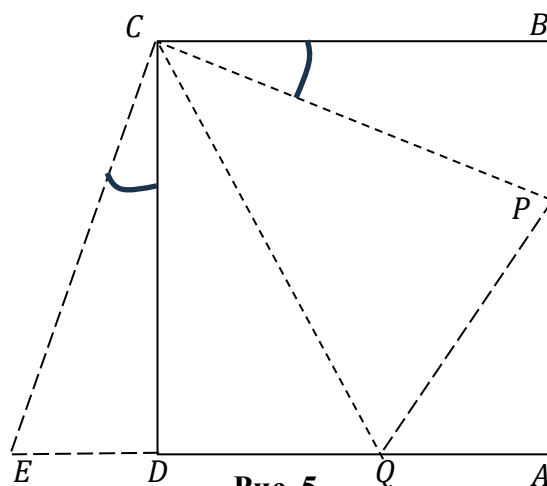


Рис. 5

8–4. Одночленом степені k назовемо вираз ax^k , де a, k – цілі ненульові числа. Тричленом назовемо суму трьох одночленів різних степенів. Яку найменшу кількість доданків у вигляді одночленів різних степенів може містити добуток двох тричленів, якщо кожний з шести одночленів, що їх утворюють, мають попарно різні степені?

Відповідь: 2.

Розв'язання. Зрозуміло, що менше двох доданків такий добуток містити не може, бо добуток двох старших одночленів та двох молодших – скоротитися не можуть. покажемо, що рівно 2 такий добуток містити може. почнемо з простої рівності, де тричлени мають одночлени однакового степені, а далі отримаємо шуканий добуток:

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \Rightarrow \\ x^7 + 4x^3 &= x^3(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = (x^5 - 2x^4 + 2x^3)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

8–3.1. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle ABC = 120^\circ$. На стороні AC відмічена така точка M , що $MC = 2AM$. Знайдіть градусну міру $\angle MBC$.

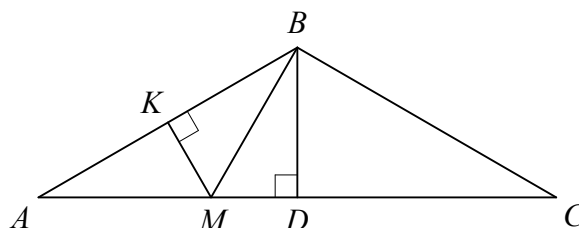


Рис. 6

Відповідь: 90° .

Розв'язання. Проведемо $BD \perp AC$ та $MK \perp AB$ (рис. 6). Нехай $AM = x$, тоді

$MK = \frac{1}{2}x$ та $MD = AD - AM = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$. Таким чином, точка M рівновіддалена від сторін $\angle ABD$, а отже $\angle ABM = \angle MBC = 30^\circ$. Звідси
 $\angle MBC = \angle ABC - \angle MBA = 90^\circ$.

8–4.1. Скільки існує квадратних тричленів $P(x) = ax^2 + bx + c$, коефіцієнти яких є не обов'язково різними цілими одноцифровими невід'ємними числами, для яких справджується рівність: $P(-1) = -5$?

Відповідь: 10.

Розв'язання. Нехай $P(x) = ax^2 + bx + c$, тоді $P(-1) = a - b + c = -5$. При цьому цілі числа a, b, c задовольняють умови: $0 \leq b, c \leq 9$ та $1 \leq a \leq 9$. Позначимо $d = 9 - b$, тоді справджується така умова: $a - 9 + d + c = -5$ та $0 \leq d, c \leq 9, 1 \leq a \leq 9$. Тепер маємо $a + d + c = 4$. Залишається зрозуміти скільки таких наборів існує. Для $a = 1$ маємо, що $d + c = 3$ і таких наборів 4, Для $a = 2, 3$ та 4 відповідно маємо $d + c = 4 - a$ і таких наборів 3, 2 та 1 відповідно. Разом таких тричленів існує рівно 10.

9 клас

9–1. Петро їздить на роботу двома шляхами – або по гарній дорозі зі швидкістю 120 км/год, або по поганій дорозі зі швидкістю 60 км/год. При цьому відомо, що гарна дорога на 16 км довша за погану та поганою дорогою Петро прибуває на роботу на 4 хв раніше. Яка довжина гарної дороги?

Відповідь: 24 км.

Розв'язання. Запишемо рівність часу на дорогу двома шляхами, де від часу по гарній дорозі слід відняти 4 хв, тобто $\frac{4}{60}$ год. Шукану довжину гарної дороги позначимо через S :

$$\frac{S}{120} - \frac{4}{60} = \frac{S - 16}{60} \Rightarrow S - 8 = 2S - 32 \Rightarrow S = 24 \text{ км.}$$

9–2. Знайдіть усі натуральні числа, остання цифра яких не дорівнює нулю, і якщо видалити першу цифру, то отримане число стане в 25 разів менше початкового.

Відповідь: 625, 3125, 9375.

Розв'язання. Нехай n – шукане число. Нехай перша цифра цього числа буде a , а число, утворене з решти цифр, буде m , де число m має k цифр. Тоді $n = 10^k a + m = 25m$, що означає, що $10^k a = 24m$. Таким чином, число $2^k 5^k a$ ділиться на число $24 = 2^3 \cdot 3$. Оскільки число $2^k 5^k a$ не ділиться на 3, число a має ділитися на 3, що залишає можливості $a = 3, 6, 9$.

Якщо $a = 3$, то $2^k 5^k : 2^3$. Отже, $k \geq 3$ і ми отримуємо $m = \frac{2^k 5^k}{24} \cdot 3 = 125 \cdot 10^{k-3}$. З умови, що остання цифра m не дорівнює нулю, ми маємо $m = 125$, звідки $n = 3125$.

Якщо $a = 6$, то $2^k 5^k : 2^2$. Отже, $k \geq 2$ і ми отримуємо $m = \frac{2^k 5^k}{24} \cdot 6 = 25 \cdot 10^{k-2}$. З умови, що остання цифра m не дорівнює нулю, ми маємо $m = 25$, звідки $n = 625$.

Якщо $a = 9$, то $2^k 5^k : 2^3$. Отже, $k \geq 3$ і ми отримуємо $m = \frac{2^k 5^k}{24} \cdot 9 = 375 \cdot 10^{k-3}$. З умови, що остання цифра m не дорівнює нулю, ми маємо $m = 375$, звідки $n = 9375$.

9–3. Заданий гострий кут BAC , на сторонах якого зафіксовані точки B та C . Точки B_1 та C_1 вибрані на бісектрисі цього кута таким чином, що $BB_1 \perp AB$ та $CC_1 \perp AC$. Точка M – середина відрізка B_1C_1 . Доведіть, що $MB = MC$.

Розв'язання. Проведемо перпендикуляр з точки C_1 до точки прямої AB , який перетинає AB у точці C_2 , аналогічно перпендикуляр з точки B_1 до точки прямої AC , який перетинає AC у точці B_2 . Крім

того нехай точка $M_c \in AC$: $MM_c \perp AC$, аналогічно точка $M_b \in AB$: $MM_b \perp AB$. Без обмеження загальності вважатимемо, що точки розташовані так, як це показано на рис. 7. Тоді $B_1B_2 \parallel MM_c \parallel C_1C$ та $C_1C_2 \parallel MM_b \parallel B_1B$. З властивості середини відрізка $B_2M_c = M_cC$ та $C_2M_b = M_bB$. Звідси матимемо, що $B_2M = MC$ та $C_2M = MB$.

Побачимо, що $\angle MB_1B_2 = \angle BB_1M$, з симетрії $BB_1 = B_1B_2$. Звідси $\triangle MB_1B_2 = \triangle MB_1B$ та $BM = MB_2$, тому й $BM = MB_2 = CM$.

9–4. Розглянемо усі підмножини множини $\{1, 2, \dots, N\}$, включно з порожньою множиною, що не містять в якості елементів два сусідні натуральні числа. Для кожної такої підмножини обчислимо добуток усіх її елементів, при цьому добуток елементів порожньої підмножини вважаємо рівним 1. Знайдіть величину $P(N)$ – суму квадратів отриманих добутків.

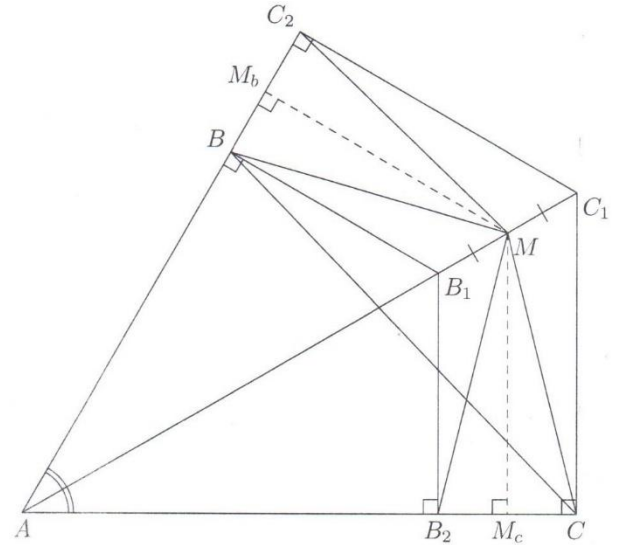


Рис. 7

Відповідь: $P(N) = (N + 1)!$.

Розв'язання. Помітимо, що для $N = 1$, маємо підмножини $\{1\}$ та $\emptyset$, звідки $P(1) = 1 + 1^2 = 2$;

для $N = 2$, додається підмножина $\{2\}$ та $P(2) = P(1) + 2^2 = 6$;

для $N = 3$, додаються підмножини $\{3\}$ та $\{1, 3\}$, а тому $P(3) = P(2) + 3^2 + 3^2 = 24$.

Звідси зробимо припущення, що $P(N) = (N + 1)!$. Доведемо це MMI.

Нехай – це доведене для деякого N . Розглянемо усі шукані підмножини множини $\{1, 2, \dots, N, N + 1\}$, які не потрапляли в розгляд попередніх підмножин для N . Зрозуміло, що то усі підмножини, що містять елемент $N + 1$, але тоді вони точно не містять елемент N . Таким чином отримуємо таку рівність:

$P(N + 1) = P(N) + (N + 1)^2 P(N - 1) = (N + 1)! + (N + 1)^2 N! = (N + 1)! (N + 2) = (N + 2)!$, що й треба було довести.

9–3.1. Шестикутник $ABCDEF$ описаний навколо кола. Відомі довжини таких його сторін: $AB = 27$, $BC = 25$, $CD = 19$ та $EF = 29$. Чому дорівнює сума довжин сторін $DE + FA$?

Відповідь: 50.

Розв'язання. Позначимо точки дотикання сторін AB, BC, CD, DE, EF та FA до вписаного кола через K, L, M, N, S та Q відповідно (рис. 8). З рівності дотичних з однієї точки до кола маємо, що

$$AK = KB, BL = LC, CM = MD, DN = NE, ES = SF, FQ = QA \Rightarrow AB + CD + EF = BC + DE + FA.$$

З умов задачі маємо, що

$$27 + 19 + 29 = 25 + DE + FA \Rightarrow DE + FA = 75 - 25 = 50.$$

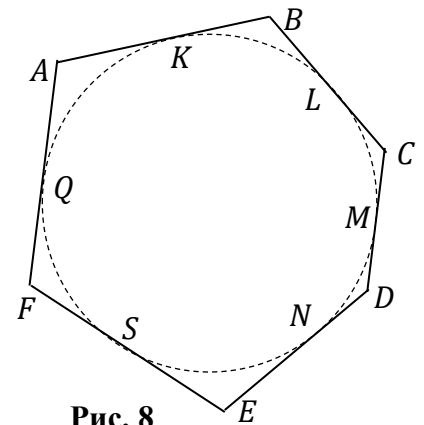


Рис. 8

9–4.1. На острові проживають лише лицарі, які завжди кажуть правду, та брехуни, які завжди брешуть. 40 мешканців острова вишикувалися у 4 черги, в яких стояли по 10 мешканців. У кожній з черг кожний мешканець, окрім трьох перших, сказав, що перед ним в черзі стоїть принаймні 3 брехуни. Скільки лицарів могло бути серед усіх 40 мешканців, що утворили ці черги? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 28.

Розв'язання. Розглянемо довільну чергу, нехай в ній серед перших трьох мешканців k брехунів та $3 - k$ лицарів. Тоді, якщо $k = 3$, то усі наступні за першими трьома – лицарі, бо вони сказали правду, тобто в цій черзі 3 брехуни і решта – лицарі. Якщо $k < 3$ брехуни, то одразу на перших трьох стоять рівно $3 - k$ брехунів, бо вони збрехали, а далі знову усі лицарі. Таким чином в кожній черзі є рівно 3 брехуни, а решта – лицарі. Таким чином усього брехунів 12, а решта – лицарі, тобто їх усього 28.

10 клас

10–1. У прямокутнику $ABCD$ точки Q , R та S – середини сторін BC , CD та DA відповідно, а точка T – середина відрізка RS . Відомо, що площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 64. Чому дорівнює площа трикутника ATQ ?

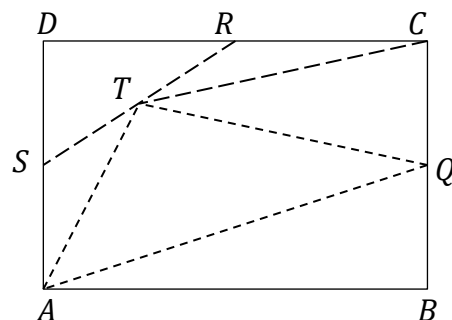


Рис. 9

Відповідь: 20.

Розв'язання. Позначимо сторони заданого прямокутника через $AB = a$, $BC = b$, тоді $RC = RD = \frac{1}{2}a$, $DS = SA = CQ = QB = \frac{1}{2}b$, відстань від точки T до відрізків DC та AD дорівнюють $\frac{1}{4}b$ та $\frac{1}{4}a$ відповідно. При цьому за умовою $ab = 64$. Тоді можемо порахувати площу усіх трикутників, що зображені на рис. 9, окрім ΔATQ .

$$S_{AST} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{4}a = \frac{ab}{16} = 4, S_{DRS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}a = \frac{ab}{8} = 8,$$

$$S_{RCT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}b = \frac{ab}{16} = 4, S_{CTQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3ab}{16} = 12, S_{AQB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}b \cdot a = \frac{ab}{4} = 16.$$

Далі знаходимо, що

$$S_{AQT} = S_{ABCD} - S_{AST} - S_{DRS} - S_{RCT} - S_{CTQ} - S_{AQB} = 64 - 44 = 20.$$

10–2. В рядок записані $n \geq 42$ чисел, кожне з яких дорівнює «+1» або «-1». Розстановка чисел задовольняє такі умови:

- сума будь-яких 40 чисел, що стоять поспіль, дорівнює 0;
- сума будь-яких 42 чисел, що стоять поспіль, не дорівнює 0.

Яке найбільше можливе значення може приймати сума $S(n)$ усіх записаних чисел та для яких n воно може досягатися?

Відповідь: 20 для $n = 60$.

Розв'язання. Позначимо ці числа зліва направо таким чином: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тоді з умови задачі можна записати такі співвідношення:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{40} = 0, a_1 + a_2 + \dots + a_{40} + a_{41} + a_{42} \neq 0 \Rightarrow a_{41} + a_{42} \neq 0.$$

Тоді $a_{41} = a_{42}$. З аналогічних міркувань

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{41} = 0, a_2 + a_3 + \dots + a_{41} + a_{42} + a_{43} \neq 0 \Rightarrow a_{42} = a_{43} \Rightarrow$$

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = \dots = a_n \Rightarrow n \leq 60.$$

Бо інакше, якщо припустити, що $n > 60$, то в сумі 40 послідовних чисел $a_{n-39} + a_{n-38} + \dots + a_n$ більше 20 однакові, а тому сума не може дорівнювати 0. Таким чином найбільше можливе значення $S(n)$ співпадає з найбільшим можливим значенням виразу $a_{41} + a_{42} + \dots + a_n$. Зрозуміло, що максимум можливий за умови $n = 60$ та $a_{41} = a_{42} = \dots = a_{60} = 1$ і це значення дорівнює 20.

10–3. Нехай a , b та c – попарно різні натуральні числа, при цьому число $p = ab + bc + ca$ – просте. Натуральні числа x , y та z – це остачі при діленні на p чисел a^2 , b^2 та c^2 відповідно. Доведіть, що числа x , y та z – попарно різні.

Розв'язання. Методом від супротивного, припустимо, що деякі два з наведених чисел співпадають.

Наприклад, $a^2 \equiv b^2 \pmod{p} \Rightarrow p \mid a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Rightarrow p \mid (a - b)$ або $p \mid (a + b)$. Але тоді в обох випадках

$$p \leq a + b \leq c(a + b) < ab + bc + ca = p,$$

отримали суперечність.

10–4. Для дійсних чисел a, b, c, d , що задовольняють умови $0 < a, b, c, d < 1$ та $a + b + c + d = 2$, доведіть, що справджується нерівність:

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \leq \frac{ab+cd}{2}.$$

Розв'язання. Перепишемо нерівність таким чином:

$$(2-2a)(2-2b)(2-2c)(2-2d) \leq 4(ab+cd)^2.$$

Замінімо в лівій частині окремі доданки 2 на $a + b + c + d$:

$$\begin{aligned} (a+b+c+d-2a)(a+b+c+d-2b)(a+b+c+d-2c)(a+b+c+d-2d) &\leq 4(ab+cd)^2 \\ \Leftrightarrow (b+d-(a-c))(a+c-(b-d))(b+d+(a-c))(a+c+(b-d)) &\leq 4(ab+cd)^2 \Leftrightarrow \\ ((a+c)^2 - (b-d)^2)((b+d)^2 - (a-c)^2) &= \\ = (2ac + 2bd + a^2 + c^2 - b^2 - d^2)(2ac + 2bd + b^2 + d^2 - a^2 - c^2) &= \\ = (2ac + 2bd)^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2 &\leq 4(ab+cd)^2. \end{aligned}$$

10–3.1. Натуральне число k називається *реверсивним*, якщо для нього існує натуральне число n , що не закінчується нулем та справджується рівність: $k = n - n'$, де число n' має цифри числа n , що записані у зворотному порядку. Наприклад, число 2178 – реверсивне, бо $2178 = 4202 - 2024$. З'ясуйте, чи є число $k = 2538$ реверсивним. Якщо так, то знайдіть відповідне натуральне число n , для якого справджується рівність $k = n - n'$.

Відповідь: так, $n = 3601$.

Розв'язання. Припустимо, що число n – чотирицифрове, тоді і n' також чотирицифрове, позначимо його через $n = \overline{abcd}$, $n' = \overline{dcba}$. Зрозуміло, що $a > d$, бо інакше число $n - n' = 2538$ не буде чотирицифровим. Тоді з віднімання одиниць маємо, що $10 + d - a = 8 \Rightarrow a = d + 2$. Тоді для віднімання тисяч маємо, що не відбувається перенос розряду, а тому $b \geq c$, оскільки в розряді десятків з цифри c була знята 1, то і з віднімання сотень буде знята 1, тому $b > c$. Тоді $b - 1 - c = 5$, тобто $b = c + 6$. Щоб шукане число n було найменшим можливим, то найменшою має бути цифра a . З умов $a = d + 2$ та $d \neq 0$ випливає, що $a = 3$ та $d = 1$. Аналогічно, для мінімальності n має бути $b = 6$ та $c = 0$. Звідси $n = 3601$, тоді $n' = 1063$ та $3601 - 1063 = 2538$.

10–4.1. Знайдіть усі трійки цілих чисел (a, b, c) , що задовольняють системі рівнянь:

$$\begin{cases} a^2 + b^3 = c^4, \\ c^2 + b^3 = a^4. \end{cases}$$

Відповідь: $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$, $(-1, 0, 1)$ та $(-1, 0, -1)$.

Розв'язання. Віднімемо ці рівняння:

$$a^2 - c^2 = c^4 - a^4 \Rightarrow a^4 - c^4 + a^2 - c^2 = 0 \Rightarrow (a^2 - c^2)(a^2 + c^2 + 1) = 0 \Rightarrow a^2 = c^2.$$

Звідси маємо, що $a^2 + b^3 = a^4 \Rightarrow b^3 = a^4 - a^2 = a^2(a^2 - 1)$.

Оскільки числа a^2 та $a^2 - 1$ – взаємно прості, то кожне з них має бути кубом цілого числа. Оскільки це послідовні цілі числа, то можливі лише такі варіанти: $a^2 = 0$ та $a^2 - 1 = -1$ або $a^2 = 1$ та $a^2 - 1 = 0$. У першому випадку $a = c = 0 = b$. У другому випадку $a = \pm 1$, $c = \pm 1$ та $b = 0$.

11 клас

11–1. Випишемо деякі великі латинські літери, які можуть бути записаними декількома відрізками:

$A, E, F, H, I, K, L, M, N, T, V, W, X, Y$ та Z .

Вагою літери назвемо кількість прямолінійних відрізків, з яких вона утворена, наприклад, літера Y з 3-х відрізків, літера I – з 1-го, літера M – з 4-х. *Словом* назвемо послідовність літер із наведеного списку в будь-якому порядку, не обов'язково різних, в якій літер не менше двох, порядок літер також відрізняє слова. *Вагою слова* назвемо сумарну вагу усіх літер, з яких утворене слово. Якщо літера зустрічається у слові двічі чи більше разів, то в вазі слова вона враховується відповідну кількість разів. Наприклад, вага слова LY дорівнює 5. Скільки існує слів, вага яких дорівнює 4?

Відповідь: 43.

Розв'язання. Зрозуміло, що літер вагою 4 чи більше не може бути в жодному слові, яке ми шукаємо. Літери вагою 3 – це A, F, H, K, N, Y та Z , літери вагою 2 – це L, T, V та X і, нарешті, є одна літера вагою 1 – це літера I . Оскільки

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

то відповідно треба розглянути 4 випадки.

Випадок $3 + 1$: тут 7 способами можна вибрати літеру ваги 3 та одним – ваги 1, і вони можуть йти в обох порядках, тому усього таких слів 14.

Випадок $2 + 2$: тут 4 способами можна вибрати першу літеру та 4 способами другу цифру, тому усього таких слів 16.

Випадок $2 + 1 + 1$: тут 4 способами можна вибрати літеру ваги 2 та 1 варіант для вибору обох літер ваги 1, крім того порядок цих літер можна вибрати 3 способами, тому усього таких слів 12.

Випадок $1 + 1 + 1 + 1$: тут існує рівно 1 таке слово.

Разом маємо $14 + 16 + 12 + 1 = 43$.

11–2. Знайдіть усі пари натуральних чисел (k, n) , що задовольняють рівності:

$$k(k + 5)^2 + 12 = n^3.$$

Відповідь: $k = 5, n = 8$.

Розв'язання. Розглянемо такі нерівності:

$$\begin{aligned} (k + 2)^3 &= k^3 + 6k^2 + 12k + 8 < k(k + 5)^2 + 12, \\ (k + 4)^3 &= k^3 + 12k^2 + 48k + 64 > k(k + 5)^2 + 12. \end{aligned}$$

Таким чином єдина можливість $n = k + 3 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} n &= (k + 3)^3 = k^3 + 9k^2 + 27k + 27 = k(k + 5)^2 + 12 = k^3 + 10k^2 + 25k + 12 \Rightarrow \\ 0 &= k^2 - 2k - 15 = (k - 5)(k + 3) \Rightarrow k = 5, n = 8. \end{aligned}$$

11–3. З точки P побудували дві дотичні PB та PT до деякого кола. Точка A така, що відрізок AB – це діаметр цього кола. Точка H – проекція точки T на діаметр AB . Доведіть, що відрізок AP ділить навпіл відрізок TH .

Розв'язання. Позначимо через O – центр кола, нехай точка P' вибрана на прямій AT така, що $OP' \perp AB$ (рис. 10). Тоді BT перпендикулярний OP та AT , тому ці відрізки паралельні. З теореми про середню лінію пряма OP' перетинає відрізок AP в середині. Таким чином $OAP'P$ – паралелограм. Звідси, якщо AP ділить навпіл відрізок OP' , то з аналогічних міркувань (або з міркувань подібності) він ділить навпіл і відрізок TH .

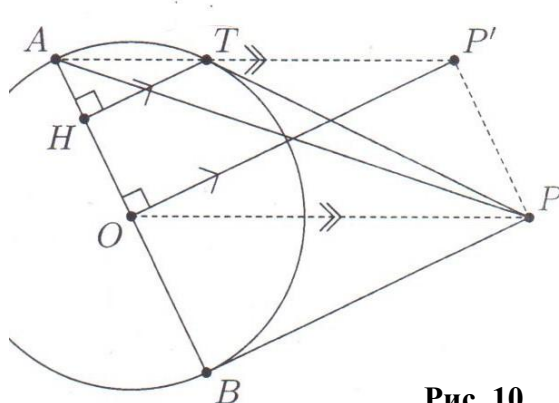


Рис. 10

11–4. Знайдіть усі такі функції $f: N \rightarrow N$, що для довільного натурального числа n справджується рівність: $f(n + 1)f(n + 2) = f^2(n)$.

Відповідь: $f(n) = m = \text{const}$ для довільного натурального m .

Розв'язання. Припустимо, що функція відмінна від сталої. Тоді знайдемо найменше можливе значення $m = f(n)$, $n \in N$. Якщо для деякого натурального числа k маємо, що $f(k+1) > f(k) = m$, то

$$f(k+2) = \frac{f^2(k)}{f(k+1)} = f(k) \cdot \frac{f(k)}{f(k+1)} < f(k),$$

одержали суперечність.

Якщо не існує такого натурального числа k маємо, що $f(k+1) = f(k) = m$ та функція не є сталою, то починаючи з деякого номера K для усіх $k \geq K$ матимемо, що $f(k) = m$, а для $k < K$ $f(k) > m$. Тоді

$$f^2(K-1) = f(K)f(K+1) = m^2,$$

і знову отримали суперечність. Таким чином умову може задовольняти лише стала функція. Зауважимо, що $f(n) = m$ задовольняє умову для довільного натурального m .

Альтернативне розв'язання. Подивимось на $f(1), f(2), f(3)$, якщо вони однакові, тоді з рівняння очевидно випливає, що функція є константою. Будемо позначати за $\deg_p(t)$ – степінь входження в число t дільника p . Отже знайшовся такий дільник p , що $\deg_p(f(1)) = \alpha$, $\deg_p(f(2)) = \beta$, та $\beta \neq \alpha$, тоді нехай $\beta < \alpha$, $\deg_p(f(3)) = 2\alpha - \beta > \alpha$. Подивимось на рівняння $f(2)^2 = f(3) \cdot f(4) \Rightarrow$
 $\deg_p(f(4)) = 3\beta - 2\alpha < \beta + 2\alpha - 2\alpha = \beta < \alpha$.

Подивимось на рівняння

$$f(3)^2 = f(4) \cdot f(5) \Rightarrow \deg_p(f(5)) = 2\deg_p(f(3)) - \deg_p(f(4)) > \deg_p(f(3)) > \deg_p(f(4)).$$

Подивимось на рівняння

$$f(4)^2 = f(5) \cdot f(6) \Rightarrow \deg_p(f(6)) = 2\deg_p(f(4)) - \deg_p(f(5)) < \deg_p(f(4)).$$

Аналогічно продовжуючи отримаємо

$$\deg_p(f(2)) > \deg_p(f(6)) > \deg_p(f(8)) > \dots$$

але нескінченно так продовжуватись не може, бо числа натуральні, а отже функція є сталою.

11–3.1. Всередині правильного шестикутника $ABCDEF$, вибрані такі точки X, Y та Z , що чотирикутники $ABZY$, $CDXZ$ та $EFYX$ є прямокутниками. Знайдіть відношення площі шестикутника $ABCDEF$ до площі чотирикутника $ABZY$.

Відповідь: $\frac{9}{2}$.

Розв'язання. Нехай сторона шестикутника $ABCDEF$ дорівнює 1 (рис. 11). З міркувань симетрії $\triangle BCZ$ – рівнобедрений, при цьому $\angle ZCB = 30^\circ \Rightarrow BZ = \frac{BM}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Звідси $S_{BZYA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Зрозуміло, що $S_{ABCDEF} = 6S_\Delta$, де через Δ позначений рівносторонній трикутник зі стороною 1. Тому $S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Далі остаточно отримуємо, що

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{BZYA}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{9}{2}.$$

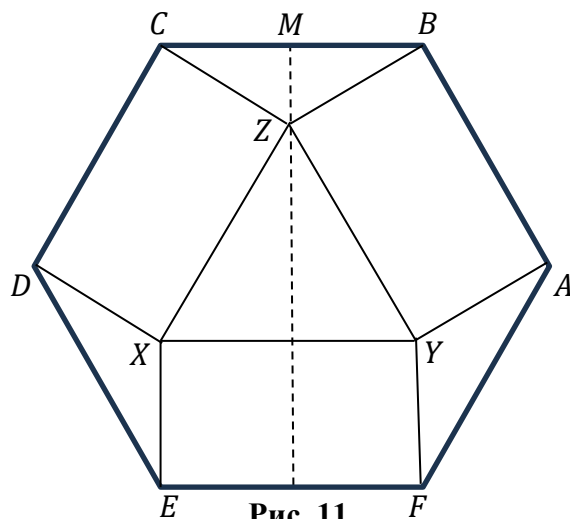


Рис. 11

11–4.1. Відомо, що функція f для довільних дійсних x задовольняє такі умови:

$$f(x) = f(2025 - x), f(x + 10) = f(2014 - x).$$

Відомо також, що $f(3) + f(4) + f(5) + f(6) = 100$. Які значення може приймати сума $f(16) + f(17) + f(18)$? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 75.

Розв'язання. Помітимо, що з другої рівності підстановкою $x + 10 = y$, маємо що $f(y) = f(2024 -$

у), звідки разом з першим рівнянням, маємо що $f(x + 1) = f(x)$, отже функція приймає однакові значення при усіх цілих значеннях аргументів. Отже з третьої рівності, $f(x) = 25$ для усіх цілих значень x . Тому $f(16) + f(17) + f(18) = 75$.