Задача 1

6 клас Задача №1

Нехай x - число красивих людей, тоді $x + \frac{40}{100}x = 1,4x$ - число розумних, $1,4x \cdot \frac{25}{100} = 0,35x$ - число розумних і красивих разом. Знайдемо відсоток розумних серед красивих

$x - 100\%$
$0,35x - ?$

$$\frac{0,35x \cdot 100\%}{x} = 35\%$$

Відповідь: 35%.

Вчитель: Юр'єва Марина Олександрівна
Кошелєва Юлія Максимівна

Критерії оцінювання задачі №1 6 клас

7б Задача розв'язана повністю, відповідь правильна

6б Задача розв'язана, але є незначні недоліки розв'язання

5б Є початок розв'язання, але порушено послідовність дій

4б Правильно виражено відсоткові співвідношення величин

3б Правильно виражено відсоткові співвідношення величин, але є логічні помилки

2б Є початкові розмірковування і вони об'єднані у правильні закономірності

1б Є початкові розмірковування, але вони не ведуть до правильних подальших дій

0б Задача неправильно розв'язана, або не приступали до розв'язання

Вчителі: Юр'єва Марина Олександрівна
Кошелєва Юлія Максимівна

Задача 2

Задача 2

Учні двох шостих класів, у кожному з яких не менше 30 школярів, купили 737 підручників. Кожен учень купив однакову кількість книжок. Скільки було шестикласників і скільки купив кожен?

Розв'язання:

1.) Знайдемо усі дільники числа 737.

737 : 1 = 737

737 : 11 = 67

737 : 67 = 11

737 : 737 = 1

2) В умові вказано, що в кожному класі не менше 30 учнів, тому в обох класах не менше 60 учнів.

3) Перебираючи дільники числа 737, а саме 1, 11 – не підходять за умовою (не менше 60). Отже, залишається два дільники 67 та 737.

737 – кількість учнів з двох класів малоймовірна, тому залишається один дільник 67, що дорівнює кількості учнів двох класів.

4) За умовою придбали 737 підручників, тому

737 : 67 = 11 – підручників придбав кожен учень.

```
 737 | 67
-67  |----
  67 | 11
 -67
   0
```

Відповідь: 67 шестикласників, кожен купив по 11 книжок.

Олійник Х. П.

Черновалюк К.А

Критерії оцінювання задачі №2

7 балів – задача розв'язана повністю з належним обґрунтуванням.
Отримано прав. відповідь.

6 балів – зробив висновок про можливу кількість учнів та підручників, але не вказав відповідь.

5 балів – знайдено дільники 737 або методом розкладання на прості множники, методом впорядкованого підбору.

3-4 бали – визначив можливі межі кількості шестикласників або кількості підручників.

2 бали – вказано правильну відповідь без належних обґрунтувань.

1 бал – наведено початкові міркування, які не привели до результату.

0 балів – не приступили до розв'язування задачі.

Олійник Х. П.

Чорновалла К.А.

Задача 3

6 клас

3 задача

Із цифр а, в, с, що не дорівнюють нулю, складено всі можливі трицифрові числа. Довести, що сума всіх таких чисел є парне число.

Розв'язання

Складемо всі можливі комбінації трицифрового числа, яке складене із цифр а, в, с:

$$\left.\begin{array}{l} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba \end{array}\right\}$$ Можна скласти 6 трицифрових чисел

Розпишемо всі 6 трицифрових чисел у вигляді розрядних доданків та додамо їх:

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 100a + 10b + c +$$

$$+ 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a +$$

$$+ b + 100c + 10b + a = 200a + 200b + 200c + 20a + 20b + 20c +$$

$$+ 2a + 2b + 2c$$

Згрупуємо розрядні доданки та винесемо спільний множник за дужки

$(200a + 200b + 200c) + (20a + 20b + 20c) + (2a + 2b + 2c) =$

$= 200(a+b+c) + 20(a+b+c) + 2(a+b+c) =$

$= (a+b+c)(200+20+2) = 222(a+b+c) \vdots 2$,

оскільки один із множників розкладу ділиться на 2.

6 клас

3 задача

7 б.: задача розв'язана повністю, розписане доведення подільності на основі розкладання чисел по розрядним доданкам.

6-5 б.: задача розв'язана, подільність доведена, відсутні кроки доведення подільності для чисел записаних у вигляді розрядів.

3-4 б.: задача розв'язана описово на основі суми останніх цифр числа

1-2 б.: Вказано часткові розв'язки на прикладі конкретних чисел.

Осипишина О.М.

Майданюк С.П

Завдання 4

Мишко ходить у басейн один раз у три дні, Вася – в чотири дні, а Коля – у п'ять днів. Вони зустрілися у басейні в понеділок. Через скільки днів і в який день тижня вони зустрінуться знову?

Перевіряли:

Олійник О. М.

Гаврилюк О. П.

Хретко П. Є.

Розв'язування.

1) НСК (3, 4, 5) = 60

Отже через 60 днів зустрінуться Мишко, Вася та Коля

2) Так як 1 тиждень становить 7 днів, то

$60 : 7 = 8$ (ост. 4)

Тоді хлопці зустрінуться на 4-й день, рахуючи з вівторка, тобто у п'ятницю.

Відповідь: вони зустрінуться через 60 днів, у п'ятницю.

Критерії оцінювання

0б – учень не приступив до розв'язування або навів хибні міркування

1б – учень навів початкові міркування або вказав одну із відповідей без пояснення

2б – учень навів початкові міркування і вказав одну із відповідей або вказав дві правильні відповіді без обґрунтування

3б – учень пояснив необхідність знаходження НСК (3; 4; 5), але допустив помилки при обчисленні.

4б – учень обґрунтував необхідність знаходження НСК (3; 4; 5) та провів правильні розрахунки.

5б. – учень правильно знайшов НСК (3; 4; 5) та провів ділення з остачею, але допустив помилку

6б – учень правильно знайшов НСК (3; 4; 5) та провів ділення з остачею, але неправильно визначив день тижня, або допустив незначні помилки в поясненні

7б – задача розв'язана правильно з повним поясненням.

Задача 1

Задача 1.

Розв'язання.

Знайдемо кількість піску, який пересипали в контейнер.

Оскільки в контейнері спочатку було 400 кг, а кількість збільшилась на 6%, то в контейнер пересипали $0,06 \cdot 400 = 24$ (кг).

Позначимо початкову кількість піску в мішку через x. Перший раз відсипали $0,25x$ кг, другий 5 кг, отже залишок після другого пересипання $(x - 0,25x - 5)$ кг. Третій раз пересипали 10% залишку, т. т. $0,1(x - 0,25x - 5)$ кг.

Всього пересипали $0,25x + 5 + 0,1(x - 0,25x - 5)$ кг.

Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$0,25x + 5 + 0,1(x - 0,25x - 5) = 24;$$

$$0,25x + 5 + 0,1x - 0,025x - 0,5 = 24;$$

$$0,325x = 19,5;$$

$$x = 19,5 : 0,325;$$

$$x = 60$$

Відповідь. В мішку було 60 кг піску.

Україна
ВІННИЦЬКА МІСЬКА РАДА
ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ
КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ВІННИЦЬКИЙ ЛІЦЕЙ № 29»
від «___» ________ 20__ р. № ______
Ідентифікаційний код 20090465
Україна, 21022, Вінницька область,
Вінницький район, місто Вінниця,
вулиця Київська, будинок 149.
тел.: (0432) 66-40-76

Критерії оцінювання задачі №1.

1б – Знайдено 6% від 400кг (на скільки збільшилась маса піску в контейнері)

1б – Знайдено 25% від початкової кількості піску в мішку.

1б – Знайдено залишок після другого пересипання.

1б – Знайдено 10% залишку.

1б – Знайдено скільки пересипали піску з мішка.

1б – Правильно складено рівняння.

1б – Розв'язано рівняння і отримана правильна відповідь.

Задача 2

Розв'язання.

$\overline{ab}$ - двоцифрове число

Тоді $\overline{ab} = 10a + b$. Число, записане тими самими цифрами, але в зворотньому порядку $\overline{ba} = 10b + a$

$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$

Оскільки a і b – цифри, то їх сума не перевищує 18

Отже, квадрат можливий, коли $a + b = 11$

Можливі варіанти:

$5 + 6 = 11$ або $6 + 5 = 11$
$2 + 9 = 11$ $\quad$ $9 + 2 = 11$
$8 + 3 = 11$ $\quad$ $3 + 8 = 11$
$7 + 4 = 11$ $\quad$ $4 + 7 = 11$

Отже, числа, які задовольняють умову задачі: 56 і 65; 29 і 92; 83 і 38; 74 і 47.

Відповідь: 56 і 65; 29 і 92; 83 і 38; 74 і 47

Критерії оцінювання до завдання №2 (7 клас)

1. Якщо двоцифрове число подано у вигляді $10a + b$ або $10b + a$, або одну чи дві пари чисел знайдено методом підбору – 1 б.
2. Якщо знайдено методом підбору 3 або 4 пари чисел, розписано вигляд чисел $10a + b$ і $10b + a$ – 2 б.
3. Якщо знайдено 4 пари чисел і присутнє обґрунтування – 3 бали
4. Якщо записана сума чисел та виконано спрощення – 4 б.
5. Якщо вказано, що $a + b = 11$ – 5 б
6. Якщо наведені варіанти значень a і b – 6 б
7. Якщо наведені всі пари чисел – 7 б.

Задача 3

Довести, що $1^3+2^3+3^3+\ldots+9^3$ не ділиться на 10.

Доведення:

За ознакою подільності число буде ділиться на 10, якщо його остання цифра 0. Знайдемо якою цифрою закінчується кожен у доданків:

$1^3=1$, 3^3-7, 5^3-5, 7^3-3, 9^3-9.

$2^3=8$, 4^3-4, 6^3-6, 8^3-2,

Для того, щоб встановити чи буде ділиться дана сума кубів на 10 знайдемо останю цифру даної суми.

$1+8+7+4+5+6+3+2+9=45$

Оскільки число закінчується цифрою 5, то дана сума кубів не буде ділиться на 10. Що і треба було довести.

Відповідь: задача доведена.

Критерії оцінювання
до завдання №3 (7 клас)

1 бал – сформлована ознака подільності на 10

2 бали – знайдено останню цифру кожного у доданків

2 бали – знайдено останню цифру суми кубів

2 бали – сформульовано та пояснено висновок до доведення.

Задача 4

4. До готелю приїхав мандрівник. Грошей він не мав, а був у нього тільки срібний ланцюжок із шести ланок. За кожен день перебування в готелі він розплачувався однією ланкою ланцюжка, при цьому хазяїн готелю попередив, що згоден узяти не більше однієї розпиляної ланки. Як мандрівнику розпиляти ланцюжок, щоб прожити в готелі шість днів та щодня розраховуватися з хазяїном?

Відповідь:
Потрібно розпиляти тільки третю ланку.
Після чого вийде 3 частини: розпиляна ланка, дві ланки і три ланки.
Перший варіант:

За 1 день віддає хазяїну готелю розпиляну ланку.
За 2 день віддає хазяїну готелю дві ланки і забирає розпиляну.
За 3 день віддає хазяїну готелю три ланки і забирає дві ланки.
За 4 день віддає розпиляну ланку.
За 5 день віддає дві ланки і забирає розпиляну ланку.
за 6 день віддає розпиляну ланку.

Другий варіант:
За 1 день – (перший варіант)
За 2 день – (перший варіант)
За 3 день віддає розпиляну ланку.
За 4 день віддає три ланки і забирає дві ланки.

За 5 день – (перший варіант)
за 6 день – (перший варіант)

Україна
ВІННИЦЬКА МІСЬКА РАДА
ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ
КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ВІННИЦЬКИЙ ЛІЦЕЙ № 29»
від «___» ________ 20 __ р. № ______
Ідентифікаційний код 20090465
Україна, 21022, Вінницька область,
Вінницький район, місто Вінниця,
вулиця Київська, будинок 149.
тел.: (0432) 66-40-76

Олімпіада з математики
ІІ етап
7 клас
2022–2023 н.р.

Критерії оцінювання розв'язку до завдання № 4.

0б – не приступив до розв'язування; неправильні міркування.

1б – неправильний вибір ланки до розмикання, що привело до неправильного розрахунку

2б – розімкнув третю (або четверту) ланку і отримав три частини по 1; 2; 3 ланки

3б – розрахувався за два дні з отриманням решти;

4б – розрахувався за 3 дні правильно

5б – розрахувався за 4 дні правильно

6б – розрахувався за 5 днів правильно

7б – розрахувався за 6 днів правильно.

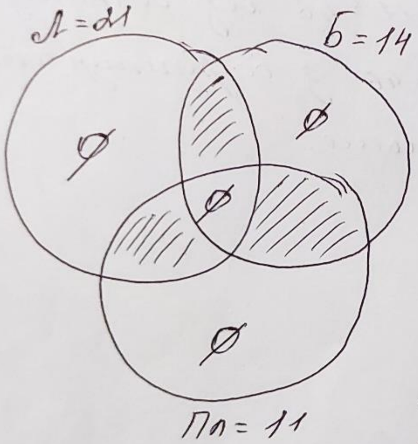
Задача 1

Завдання №1

8 клас

В класі 21 лижник, 14 баскетболістів та 11 плавців. Відомо, що кожен спортсмен займається двома видами спорту. Скільки в класі спортсменів?

Розв'язання



Оскільки за умовою задачі кожен спортсмен займається двома видами спорту, то в кількість спортсменів класу не входять ті, хто займається в лише одній секції або одночасно в трьох секціях.

Врахувавши, що кожен спортсмен рахується двічі, додаємо (знаходимо суму): $21 + 14 + 11 = 46$ і отриманий результат зменшуємо в 2 рази для знаходження спортсменів у класі $46 : 2 = 23$.

Критерії оцінювання завдання №1:

1 бал – Наявність правильної відповіді.

1 бал – Обґрунтування відсутності спортсменів лише 1 виду секції.

1 бал – Обґрунтування відсутності спортсменів всіх 3 видів секції.

1 бал – Знайдена сума $21 + 14 + 11 = 46$ без обґрунтування

1 бал – Знайдена сума $21 + 14 + 11 = 46$ з обґрунтуванням того, що кількість учнів вдвічі більше.

1 бал – $\frac{\Sigma}{2}$ без обґрунтування.

1 бал – $\frac{\Sigma}{2}$ з обґрунтуванням.

Задача 2

Завдання №2 (8 клас)

Розв'язання

$$a^{5n}+2a^{4n}+2a^{3n}+2a^{2n}+a^{n}=$$

$$=a^{n}(a^{4n}+2a^{3n}+2a^{2n}+2a^{n}+1)=$$

$$=a^{n}((a^{4n}+2a^{2n}+1)+(2a^{3n}+2a^{n}))=$$

$$=a^{n}((a^{2n}+1)^{2}+2a^{n}(a^{2n}+1))=$$

$$=a^{n}(a^{2n}+1)(a^{2n}+1+2a^{n})=$$

$$=a^{n}(a^{2n}+1)(a^{n}+1)^{2}=a^{n}(a^{2n}+1)(a^{n}+1)(a^{n}+1)$$

Критерії оцінювання
№2 (8 клас)

0б Завдання розв'язане неправильно або відсутнє розв'язання

1б Винесено за дужки спільний множник або доданки об'єднано у кілька груп і з кожної групи винесено спільний множник.

2б. В отриманому добутку у другому множнику правильно об'єднані доданки у групи і виділено квадрат двочлена або вираз представити у вигляді добутку двох виразів

1б. У другій групі доданків винесено спільний множник $2a^n$ або у одному з множників - виразів винесено спільний множник за дужки

1б. Правильно винесено вираз $(a^{2n}+1)$ за дужки або виділено квадрат двочлена

1б. Виділено квадрат двочлена з виразу $(a^{2n}+1+2a^n)$ або утворений вираз правильно розкладений на усі можливі множники

1б Заданий вираз правильно розкладений на усі можливі множники.

всього 7б

Примітка. За 50% виконаних правильно логічних кроків учень отримує 4 бали

Задача 3

(3) Виділимо цілу частину дробу $\frac{n^2+5}{n+5}$

$$\frac{n^2+5}{n+5} = \frac{n^2-25+30}{n+5} = \frac{n^2-25}{n+5} + \frac{30}{n+5} =$$

$$= \frac{(n-5)(n+5)}{n+5} + \frac{30}{n+5} = n-5 + \frac{30}{n+5}$$

Оскільки n^2+5 ділиться без остачі на $n+5$, то 30 ділиться без остачі на $n+5$.

Випишемо множину дільників 30: $\{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$

Тоді $n+5=1 \Rightarrow n=-4 \notin N$

$n+5=2 \Rightarrow n=-3 \notin N$

$n+5=3 \Rightarrow n=-2 \notin N$

$n+5=5 \Rightarrow n=0 \notin N$

$n+5=6 \Rightarrow n=1$

$n+5=10 \Rightarrow n=5$

$n+5=15 \Rightarrow n=10$

$n+5=30 \Rightarrow n=25$

Отже, шукані значення $n=1, 5, 10, 25$

Відповідь: 1; 5; 10; 25

Задача №3

Критерії

1б – знайдено не менше трьох значень n без правильного обгрунтування (підбір)

2б – Знайдено не менше двох значень n після виділення цілої частини дробу

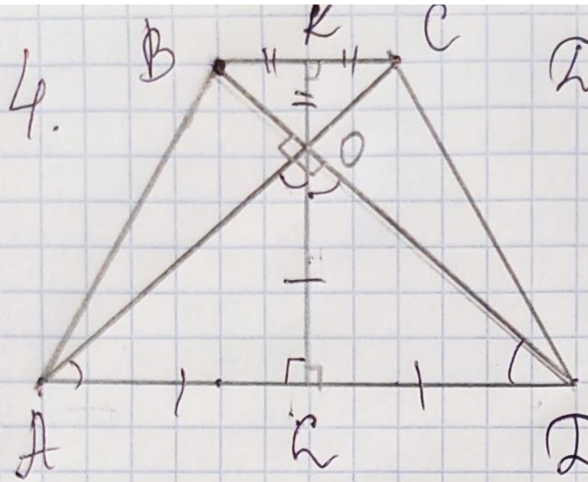
4б – Знайдено не менше трьох значень n після виділення цілої частини дробу без обгрунтування того, що при $n \in N$ вираз $(n+5) \in N$

6б – Знайдено не більше трьох значень n після виділення цілої частини дробу з обгрунтуванням

7б – Знайдено всі натуральні значення n з повним обгрунтуванням.

Задача 4

4.



Дано: $ABCD$ - рівнобічна трапеція, $BD \perp AC = O$, $KL = a$ - висота.

Знайти: MN - середня трап.

Р-ня.

Нехай $ABCD$ - дана трапеція, у якій $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $AC \perp BD$, $KL = a$.
У рівнобічній трапеції віссю симетрії є перпендикуляр KL до її основ, який проходить через т. O перетину діагоналей.
Оскільки $\angle AOD = 90^\circ$, то $\angle AOL = \angle OAL = \angle DOL = \angle ODL = 45^\circ$.
Отже, за ознакою рівнобедреного т-ка ΔALO і ΔOLD - рівнобедрені.
$(AL = OL,\ OL = OD)$

$$\left.\begin{aligned} AL &= OL, \\ LD &= OL, \end{aligned}\right\} \Rightarrow AD = AL + LD = OL + OL = 2OL$$

Аналогічно доводимо, що
$BC = BK + KC = OK + OK = 2OK$.

За умовою $KL = a$.

За властивістю середньої лінії трапеції: $MN = \frac{BC + AD}{2}$

$MN = \frac{2OL + 2OK}{2} = \frac{2(OL + OK)}{2} = \frac{2 \cdot KL}{2} =$

$= KL = a.$

Отже, $MN = a$.

Задача 4.

0б – розв'язок та обґрунтування відсутні; неправильні міркування;

1б. – наявність правильної відповіді; правильні початкові міркування;

2б. – доведено, що трикутник прямокутний рівнобедрений;

6б – завдання виконано правильно, проте неповне обґрунтування під час доведення;

7б. – задача розв'язана правильно з повним обґрунтуванням.

Задача 5

(І-й сп.) Завдання №5

Неправдиві острівляни обирали ствердну відповідь 3 рази;

тому

$40\% + 50\% + 30\% = 120\%$ – сума % з неправдивими

Зайві 20% (можливі 100%) дорівнюють зайвому подвоєному числу брехунів (давали ств. та заперечн. в-ді)

Звідси брехунів – 10%

За „Арбалет" збрехали зі ствердною відповіддю, що $40\% - 10\% = 30\%$

Відповідь. 30%

(ІІ сп.) Введемо позначення:

	Так	Ні
За „Арбалет" –	x	–
За „Забрало" –	y	–
За „Дракон" –	z	–
За „Меч" –	–	+

N

де x – кількість острівʼян, які голосували за „Арбалет“

y – к-сть остр., які голосували за „Забрало“

z – к-сть остр., які голосув. за „Дракон“

t – к-сть остр., які збрехали

N – загальна к-сть острівʼян

Складемо залежність:

$$N = x + y + z + t$$

Тоді

$$\text{I}: \ x + t = 0,4N$$
$$\text{II}: \ y + t = 0,5N$$
$$\text{III}: \ z + t = 0,3N$$

Додамо три рівності: $(\text{I} + \text{II} + \text{III})$:

$$x + y + z + 3t = 1,2N$$

$$\underbrace{(x + y + z + t)}_{=N} + 2t = 1,2N$$

замінимо (підставимо)

Звідки

$$N + 2t = 1,2N$$
$$2t = 1,2N - N$$
$$2t = 0,2N$$

звідки $t = 0{,}1N$,

звідси стверджуємо, що остріввян, які сказали неправду 10% від усього населення на острові.

Повернемося до рівності:

$$x + t = 0{,}4N$$

якщо $t = 0{,}1N$, то:

$$x + 0{,}1N = 0{,}4N$$

$$x = 0{,}3N$$

Отже, 30% остріввян дійсно проголосували за „Арбалет"

Критерії оцінювання

№3 завдання

0б повністю неправильний розв'язок або вказана неправильна відповідь

1б учень знайшов та пояснив % стверджувальних відповідей або ввів правильні позначення або вказав менше 2 дій без пояснень

1б учень вказав на зайві 20%, та пояснив або записав правильне рівняння

1б пояснив як знайти % ~~[illegible]~~ неправдивих ~~[illegible]~~ острів'ян або правильно розв'язав рівняння

2б правильно знайшов % неправдивих острів'ян або визначив з рівняння % брехунів

2б правильно знайдено % острів'ян, які дійсно вболівали за „Арбалет"

Завдання 1

Вправа 1.

Розкласти на множники

$(x+1)(x+3)\cdot(x+5)(x+7)+15$

Розв'язок:

$(x+1)(x+7)(x+3)\cdot(x+5)+15=$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

Вираз прирівняємо до 0

$(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=-15$

Введемо заміну: $x^2+8x+7=a$,

тоді $x^2+8x+15=a+8$

$a\cdot(a+8)=-15$

$a^2+8a+15=0$

$a_1=-5$

$a_2=-3$

$x^2+8x+7=-5$

$x^2+8x+12=0$

$x_1=-2$

$x_2=-6$

$x^2+8x+7=-3$

$x^2+8x+10=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{24}}{2};$

$x_{1,2}=-4\pm\sqrt{6}$

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=(x+2)(x+6)\cdot$

$\cdot(x-(-4+\sqrt{6}))(x-(-4-\sqrt{6}))=$

$=(x+2)(x+6)\cdot(x+4-\sqrt{6})\cdot(x+4+\sqrt{6})$

Відповідь: $(x+2)(x+6)(x+4-\sqrt{6})(x+4+\sqrt{6})$

Україна
ВІННИЦЬКА МІСЬКА РАДА
ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ
КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ВІННИЦЬКИЙ ЛІЦЕЙ № 29»
від «___» ________ 20 __ р. № ______
Ідентифікаційний код 20090465
Україна, 21022, Вінницька область,
Вінницький район, місто Вінниця,
вулиця Київська, будинок 149.
тел.: (0432) 66-40-76

Завдання №1

Критерії оцінювання

0 – Розв'язок відсутній або завдання розв'язано цілком неправильно

1 – Визначено спосіб розв'язання, але розв'язання відсутнє

2 – Запропонована ідея розв'язку, зроблені деякі кроки, але подальший розв'язок відсутній (вірно згруповані множники)

3 – Вірно знайдений добуток многочленів та вираз прирівняний до 0, але відсутнє подальше розв'язання. Отримуємо $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)=-15$

4 – Наявний частковий випадок, чітко виражена не менше як половина розв'язання завдання (Введено заміну)

5 – Знайдений розв'язок правильний, але містить незначні математичні недоліки

6 – Знайдений розв'язок, але недостатньо обґрунтовані логічні кроки

7 – Завдання розв'язано правильно, супроводжується достатніми поясненнями.

Завдання 2

9 клас (завдання 2)

Якщо деяке двоцифрове число помножити на суму його цифр, то в результаті отримаємо число 418. Якщо деяке двоцифрове число поділити на суму його цифр, то в частці буде 3 і в остачі 5. Знати це число.

Нехай шукане число буде $\overline{ab}$. За умовою задачі складемо рівняння:

$(10a+b)(a+b)=418$ та $10a+b=3(a+b)+5$.

Дані рівняння мають виконуватися одночасно, тому складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}(10a+b)(a+b)=418;\\ 10a+b=3(a+b)+5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}10a+b=3(a+b)+5;\\ (3a+3b+5)(a+b)=418;\end{cases}$$

$(3a+3b+5)(a+b)=418$

$3a^2+3ab+3ab+3b^2+5a+5b=$
$=418,$

$3a^2+6ab+3b^2+5(a+b)-418=0$

$3(a+b)^2+5(a+b)-418=0$

$a+b=t$, то $3t^2+5t-418=0$

$D=5041$

$t_1=11$ $t_2=-12\frac{2}{3}$

$a+b=11$ або $a+b=-12\frac{2}{3}$

$a>0$
$b>0$
$a+b>0$
$a\neq 0$, то
$a+b=-12\frac{2}{3}$
зайвий корінь.

$$\begin{cases}a+b=11\\ (10a+b)\cdot 11=418\end{cases}$$

$10a+b=418:11$

$10a+b=38.$

Отже, шукане число 38.

Відповідь: 38.

Завдання №2

Критерії оцінювання

0б – Розв'язок відсутній або завдання розв'язано цілком неправильно.

1б – Вказано правильну відповідь без обґрунтувань або складено хоча б одне з рівнянь відповідно до умови задачі

2б Запропонована ідея розв'язку, зроблені деякі кроки.

3б Зроблені перетворення і сформоване рівняння $3(a+b)^2+5(a+b)-418=0$.

4б–5б Введено заміну змінних та знайдено корені рівняння, визначено корінь, що незадовільняє умову задачі

6б Визначено суму цифр даного числа

7б Знайдено шукане число і наведено повне обґрунтування розв'язування даної задачі

Завдання 3

Розв'язання завдання №3.

Побудувати графік $y=\frac{(2x-4)(x-1)}{x-2}$.

1. Знайдемо область визначення функції:

$x-2\neq 0$
$x\neq 2$

$D(y):\ x\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.

2. Виконаємо перетворення:

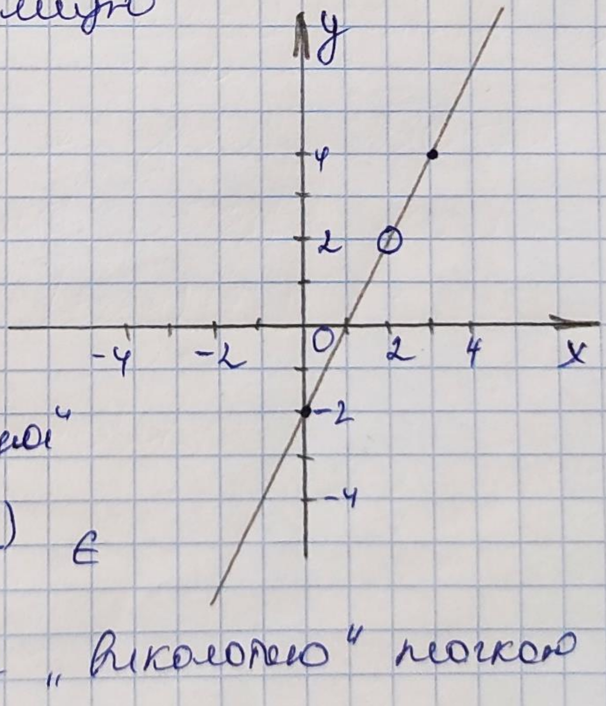
$$y=\frac{(2x-4)(x-1)}{x-2}=\frac{2(x-2)(x-1)}{x-2}=2(x-1)$$

$y=2x-2$

Графіком отриманої функції є пряма.

3. Складемо таблицю

x	0	3
y	-2	4



Отже, графіком даної функції $y=\frac{(2x-4)(x-1)}{x-2}$ є пряма $y=2x-2$ з „виколотою" точкою $(2;2)$.

Критерії оцінювання

до завдання №3

1 б. Учень знайшов область визначення функції

2 б. Учень виконав деякі кроки перетворення.

3 б. Учень виконав правильно перетворення і отримав формулу $y = 2x - 2$.

4 б. Учень склав таблицю для побудови графіка функції $y = 2x - 2$ і вказав, що є її графіком пряма. або побудував графік, не вказавши ОДЗ.

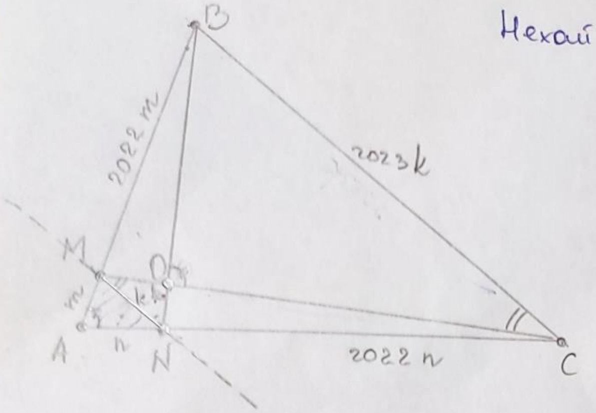
5 б. Учень побудував графік функції $y = 2x - 2$, вказавши ОДЗ

6 б. Учень правильно побудував графік функції $y = \frac{(2x-4)(x-1)}{x-2}$ („виколов" точку $(2;2)$), але не зробив висновок.

7 б. Учень правильно побудував графік функції $y = \frac{(2x-4)(x-1)}{x-2}$ і зробив висновок.

Задача 4

Задача №4



Нехай $AM = m, MB = 2022m$

$AN = n, NC = 2022n$

1) $\Delta AMN \sim \Delta ABC$,

бо $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2023}$ і $\angle A$ – спільний.

Тоді $MN : BC = 1 : 2023$

2) $\Delta MON \sim \Delta COB$,

бо I $\angle MON = \angle COB$ (як вертикальні)

II $\angle NMO = \angle BCO$ (як вн. різносторонні кути при $MN \parallel BC$ (~~т. Ф~~ теорема про пропорційні відрізки) і січній MC)

Тоді: $BO : ON = CO : OM = BC : MN = 2023 : 1$.

Відповідь. $2023 : 1$.

Критерії оцінювання:

0б. — завдання відсутнє або розв'язання повністю неправильне;

1б. — доведено подібність ΔABN і ΔACM

2б. — доведено подібність ΔBOM і ΔCON

3б. — доведено подібність ΔAMN і ΔABC

4б. — знайдено відношення $MN : BC = 1 : 2023$

6б. — доведено подібність ΔMON і ΔBOC та ~~або~~ знайдено одне з ~~даних~~ потрібних відношень (за ум. викон. попередніх пунктів)

7б. — завдання розв'язано повністю з необхідним обґрунтуванням.

Перевіряли: Кирилюк В. В. (ВФМЛ №17)
Ярощук С. М. (ВЛ №34)
Дученко В. О. (ВЛ №35)

Задача 5

9 клас

5 задача

Критерії:

1) Розділити замок на зали, виконати малюнок 3б

2) Вказати відповідь: 13 з. 1б

3) Довести вказану відповідь. А саме:

В кожній кімнаті, окрім кутових, може бути принаймні 2 дверей. У кутових є лише по 1 двері. Тому, ввійшовши в кутову кімнату, для переходу в іншу залу ми повернемося в кімнату, з якої зайшли, чим порушимо умову задачі. 2б

Тому $16 - 3 = 13$ (к)
16 − загальна кількість кімнат
3 − кутові кімнати

Альтернативне пояснення: 3 з. − 1 дв.
6 з. − 2 дв.
7 з. − 3 дв.

$6 + 7 = 13$ (з) − пояснення аналогічне до попереднього

1б 4) Навести приклад обходу 13 залів

Перевіряли:

1. Демець Тетяна Юріївна − ВТЛ
2. Дмитренко Софія Борисівна − КЗ „ВЛ №32"
3. Петренко Вікторія Олексіївна − КЗ „ВЛ №8"

Завдання1

Завдання 1

$$\frac{3x}{2x^2-3x+4} - \frac{2x}{2x^2-x+4} = \frac{3}{5} \quad \Big| : x \neq 0$$

$$\frac{3}{2x-3+\frac{4}{x}} - \frac{2}{2x-1+\frac{4}{x}} = \frac{3}{5}$$

$$2x + \frac{4}{x} = a$$

$$\frac{^{5(a-1)}3}{a-2} - \frac{^{5(a-3)}2}{a-1} = \frac{^{(a-3)(a-1)}3}{5}$$

$$15a - 15 - 10a + 30 - 3(a^2 - a - 3a + 3) = 0$$

$$5a + 15 - 3a^2 + 12a - 9 = 0$$

$$-3a^2 + 17a + 6 = 0$$

$$3a^2 - 17a - 6 = 0$$

$$D = 289 + 72 = 361$$

$$a_1 = \frac{17-19}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{17+19}{6} = 6$$

ОДЗ:

$$2x^2 - 3x + 4 \neq 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0$$

$$2x^2 - x + 4 \neq 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 4 < 0$$

$$2x^{\backslash 3x} + \frac{4}{x}^{\backslash 3} = -\frac{1}{3}^{\backslash x}$$

$$6x^2 + x + 12 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 6 \cdot 12 < 0$$

$$\varnothing$$

$$2x^{\backslash x} + \frac{4}{x}^{\backslash 1} = 6^{\backslash x}$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$D = 36 - 32 = 4$$

$$x_1 = \frac{6-2}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{6+2}{4} = 2$$

Відповідь: 1; 2.

1б – поділено на x або вказано ОДЗ або правильно зведено до спільного знаменника

2б – отримано многочлен четвертого степеня та вказано ОДЗ згідно умови

6б – правильне розв'язання але не вказано ОДЗ, або вказано неправильну відповідь (отримано правильний результат але неправильно записано у відповідь)

7б – повне розв'язання.

Завдання 2

10 клас

№2

Доведення №2

1. Нехай $a \vdots 7$, тоді $a = 7k$, $k \in N$

$a^3 = (7k)^3 \vdots 7$ – остача 0.

2. Нехай $a = 7k+1$, тоді

$$a^3 = (7k+1)^3 = \underbrace{(7k)^3}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot(7k)^2\cdot 1}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot 7k\cdot 1^2}_{\vdots 7} + \underbrace{1^3}_{\text{остача } 1}$$

3. Нехай $a = 7k+2$, тоді

$$a^3 = (7k+2)^3 = \underbrace{(7k)^3}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot(7k)^2\cdot 2}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot 7k\cdot 2^2}_{\vdots 7} + \underbrace{2^3}_{\text{остача } 1}$$

4. Нехай $a = 7k+3$, тоді

$$a^3 = (7k+3)^3 = \underbrace{(7k)^3}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot(7k)^2\cdot 3}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot 7k\cdot 3^2}_{\vdots 7} + \underbrace{3^3}_{\text{остача } 6}$$

5. Нехай $a = 7k+4$, тоді

$$a^3 = (7k+4)^3 = \underbrace{(7k)^3}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot(7k)^2\cdot 4}_{\vdots 7} + \underbrace{3\cdot 7k\cdot 4^2}_{\vdots 7} + \underbrace{4^3}_{\text{остача } 1.}$$

6. Нехай $a = 7k+5$, тоді

$$a^3 = (7k+5)^3 = (7k)^3 + \text{''} + \text{''} + \underbrace{5^3}_{\text{остача } 6.}$$

7. Нехай $a = 7k+6$, тоді

$$a^3 = (7k+6)^3 = (7k)^3 + \ldots + \underbrace{6^3}_{\text{остача } 6}$$

Отже, бачимо що остачі 0, 1, 6 ч.т.д.

Критерії оцінювання

0б. – Не приступив до розв'язання, або доведення повністю не проведене.

1б - спроба порахувати куби чисел і знайти їх остачу

3б - стверджується, що послідовність остач 1, 1, 6, 1, 6, 6, 0, і періодична, але без обгрунтування.

6б – допущено помилку в розгляді одного з семи випадків.

7б - задача розв'язана і доведена повністю.

Завдання 3

Завдание №3

$f(x) = ax^2 + bx + c$

1) $A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

2) $y = 4x$

1) $x_в = -\frac{b}{2a}$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$

$b = a$

2) $y_в = -\frac{b^2 + 4ac}{4a}$

$-\frac{b^2 + 4ac}{4a} = 2$

$-\frac{a^2 + 4ac}{4a} = 2$

$\frac{a(-a + 4c)}{4a} = 2$

$-a + 4c = 8$

$4c = a + 8$

$c = \frac{1}{4}a + 2$

3) Парабола має спільну точку з прямою $y = 4x$

розв'яжемо рівняння

$ax^2 + ax + c = 4x;$

$ax^2 + ax - 4x + c = 0;$

$ax^2 + (a-4)x + c = 0$

Рівняння має один розв'язок коли $D = 0$

$(a-4)^2 - 4\cdot a\cdot c = 0$

$(a-4)^2 = 4ac$

$a^2 - 8a + 16 = 4a\left(\frac{1}{4}a + 2\right)$

$a^2 - 8a + 16 = a^2 + 8a$

$-16a = -16$

$a = 1$ $\quad b = 1$

тоді $c = \frac{1}{4}a + 2 = \frac{1}{4} + 2 = 2\frac{1}{4}$

Відповідь:
$a = 1 \quad b = 1 \; ; \; c = 2\frac{1}{4}$

Завдання №3 (критерії оцінювання

1) 1б. Доведено що $a = b$

2) 1б Виражено c

3) 1б Складене рівняння і
обґрунтовано, що
1б $ax^2 + bx + c = 4x$
(обґрунтовано)

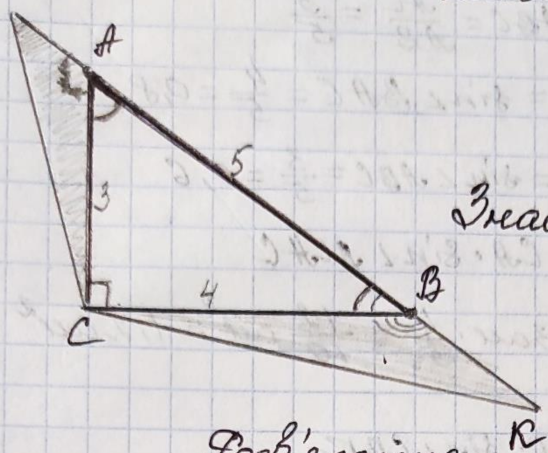
4) 1б Доведено що рівняння має один розв'язок, якщо $D = 0$

5) 1б Правильно розв'язане рівняння

6) 1б Знайдені коефіцієнти.

Завдання 4

Завдання 4 10кл. 2022р.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$
$AC = 3$ см
$BC = 4$ см
$MK = 8$ см
$AM = 1$ см, $BK = 2$ см

Знайти: $S_{\triangle CMK}$.

Розв'язання:

1) Виконаємо побудову точок M і K.

Якщо $MA + AB + BK = MK$ – за основною властивістю вимірювання відрізків, то M, A, B, K лежать на одній прямій

2) За т. Піфагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ см^2
$AB = 5$ см

Отже: $MK = 8$ см, $AM = 1$ см, $BK = 2$ см – за умовою
1 см + 5 см + 2 см = 8 см
8 см = 8 см
Точки M, A, B, K лежать на одній прямій.

3) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4$ см $\cdot 3$ см $= 6$ см^2

4) $\left.\begin{array}{l}\angle MAC + \angle BAC = 180^\circ \\ \angle CBK + \angle ABC = 180^\circ\end{array}\right\}$ як суміжні кути

Якщо $\angle + \beta = 180^\circ$, то $\sin \angle = \sin \beta$ – за властивістю тригонометричних функцій.

З $\triangle ABC$: $\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$

$\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

Отже : $\sin\angle MAC = \sin\angle BAC = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\sin\angle CBK = \sin\angle ABC = \frac{3}{5} = 0{,}6$

5) $S_{\triangle MAC} = \frac{1}{2} MA \cdot CA \cdot \sin\angle MAC$

$S_{\triangle MAC} = \frac{1}{2} \cdot 1см \cdot 3см \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{10} см^2 = 1{,}2 см^2$

6) $S_{\triangle CBK} = \frac{1}{2} BK \cdot BC \cdot \sin\angle CBK$

$S_{\triangle CBK} = \frac{1}{2} \cdot 2см \cdot 4см \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5} см^2 = 2{,}4 см^2$

7) $S_{\triangle CMK} = S_{\triangle CBK} + S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MAC}$

$S_{\triangle CMK} = 2{,}4см^2 + 6см^2 + 1{,}2см^2$

$S_{\triangle CMK} = 9{,}6 см^2$

Відповідь : $S_{\triangle CMK} = 9{,}6 см^2$

Критерії оцінювання завдання №4, 10 клас

1. Якщо учень знайшов гіпотенузу $\triangle ABC$ + 1 бал
2. Якщо учень обґрунтував чому точки M, A, B, K лежать на одній прямій + 1б
3. Якщо учень знайшов площу $\triangle ABC$ + 1б
4. Якщо учень знайшов синуси гострих кутів прямокутного трикутника + 1б
5. Якщо учень застосував формулу $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$ для суміжних кутів у $\triangle MAC$ і $\triangle CBK$ + 1б
6. Якщо учень знайшов площі $\triangle MAC$ і $\triangle CBK$ + 1б
7. Якщо учень знайшов площу $\triangle MCK$ як суму площ $\triangle ABC$, $\triangle MAC$ і $\triangle CBK$ + 1б.

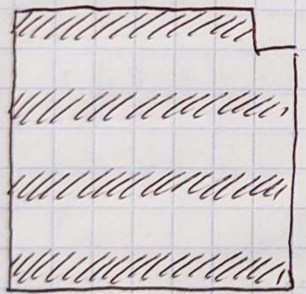
Завдання 5

10 клас

Задача №5

Припустимо, що це можливо. Тоді потрібно для покриття 12 горизонтальних і 12 вертикальних плиток.

Розфарбуємо дошку в два кольори так, як показано на рисунку.



▨ — чорна клітина.

Кількість чорних клітин — 27.

Помітимо, що плитка ▭ покриває або 0, або 2 чорні клітинки, а плитка ▯ завжди 1 чорну клітинку. Тоді разом вони покривають завжди парну кількість чорних клітин, а 27 — непарне. Дістали протиріччя. Отже, відповідь — не можна.

10 клас

Критерії №5

0 балів — за слова „перебором знаходимо, що неможливо"; лише відповідь.

+1 бал — є міркування про те, що для покриття знадобиться 12 плиток виду ▭ і 12 плиток виду ▯

+1 бал — спроба довести, що це неможливо, враховуючи (оцінюючи) кількість горизонтальних і вертикальних прямокутників в кожному рядку

1 бал — для пояснення чому неможливо здійснена спроба деякого розфарбування дошки

7 балів — правильне розв'язання

Завдання 1

11 клас.

№1 Розв'язати рівняння $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$

Розв'язання.

1) ОДЗ: $x \neq 0$.

2) $3\left(\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}\right)-10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)=0$

Заміна $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t$, тоді

3) $\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)^2=t^2$

$\frac{x^2}{9}-\frac{8}{3}+\frac{16}{x^2}=t^2$

$\frac{x^2}{9}+\frac{16}{x^2}=t^2+\frac{8}{3}$

4) Отримаємо рівняння

$3\left(t^2+\frac{8}{3}\right)-10t=0$

5) $3t^2-10t+8=0$

$D=100-4\cdot3\cdot8=4.\quad \sqrt{D}=2$

$t_1=\frac{10-2}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};\quad t_2=\frac{10+2}{6}=2.$

Повернемось до заміни

6) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=\frac{4}{3}$

$x^2-12-4x=0$

$x^2-4x-12=0$

$x_1=-2$

$x_2=6$

7) $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=2$

$x^2-12-6x=0$

$x^2-6x-12=0$

$D=36-4\cdot(-12)=36+48=84.$

$\sqrt{D}=\sqrt{84}=\sqrt{4\cdot21}=2\sqrt{21}$

$x_1=\frac{6-2\sqrt{21}}{2}=3-\sqrt{21}$

$x_2=\frac{6+2\sqrt{21}}{2}=3+\sqrt{21}$

Відповідь: $-2;\ 6;\ 3-\sqrt{21};\ 3+\sqrt{21}.$

11 клас. №1 Критерії оцінювання.

0 балів	Учень не розв'язував задачу (відсутні будь-які записи, що відповідають умові задачі)
1 бал	Знайдено ОДЗ, наведено певні міркування
2 бали	Зроблено заміну
3 бали	Записані необхідні перетворення для запису рівняння з новою змінною
4 бали	Записане рівняння з новою змінною
5 балів	Правильний розв'язок рівняння з новою змінною
6 балів 7 балів	Учень повернувся до заміни та знайшов всі 4 корені

6 балів знайдена частина коренів

7 балів знайдено всі корені

Завдання 2

Задача 2

Нехай n - кількість вписувань „15" у кожне число, тоді загальна к-ть цифр в числі; $2n+2$

$n \geq 0$ $n \in Z$

кількість: $1 - n+1$

$5 - n$

$6 - 1$

Подамо наші числа у вигляді:

$$10^{2n+1}+10^{2n}\ldots+10^{n+1}+5\cdot 10^{n}\ldots+10+6$$

Розіб'ємо на 2 суми геометричних прогресій:

$$\left(10^{2n+1}\ldots 10^{n+1}\right)+5\cdot\left(10^{n}+\ldots 10^{2}\right)+6$$

За формулою суми геометричних прогресії

$$\frac{10^{n+1}(10^{n+1}-1)}{9}+\frac{5\cdot 10^{2}(10^{n-1}-1)}{9}+6=$$

$$=\frac{10^{2n+2}-10^{n+1}+5\cdot 10^{n+1}-50+54}{9}=\frac{10^{2(n+2)}+4\cdot 10^{n+1}+4}{9}=$$

$= \left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$ – що й треба було довести

Критерії:

0б – розв'язок відсутній або наведені абсолютно неправильні міркування.

1б – наведені правильні міркування, які можуть привести до розв'язку

6б – розв'язана задача правильно, але не всі факти доведено

7б – повністю правильне розв'язання

№3 Завдання 3

$$|x^3-3x+1| < x^3+x^2-1$$

$$\begin{cases} \cancel{x^3}-3x+\cancel{1} < \cancel{x^3}+x^2-1 \\ x^3-3x+\cancel{1} > -x^3-x^2+\cancel{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2-3x+2 < 0 \\ 2x^3+x^2-3x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x-2 > 0 \\ x(2x^2+x-3) > 0 \end{cases}$$

$x^2+3x-2=0$

$D = 9+8 = 17$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$

$x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

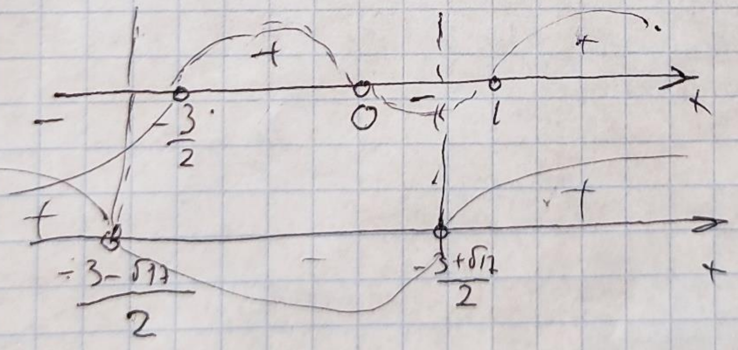
$$\begin{cases} \left(x - \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) > 0 \\ x(x-1)(2x+3) > 0 \end{cases}$$

$2x^2+x-3=0$

$D = 1+24 = 25$

$x_1 = \frac{-1+5}{4} = 1$

$x_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$



$x \in (1; +\infty)$

Відповідь: $x \in (1; +\infty)$

Критерії:

2 бали. Правильно складена система нерівностей

4 бали. Правильно розв'язана система двох нерівностей по 2 бали за кожну нерівність

1 бал. Правильно записана відповідь.

1) 1 бал. Правильна лише відповідь, або здійснені початкові міркування які не привели до правильного розв'язання

2) 2 бали. Правильно здійснено перехід вихідної нерівності до рівносильної системи нерівностей

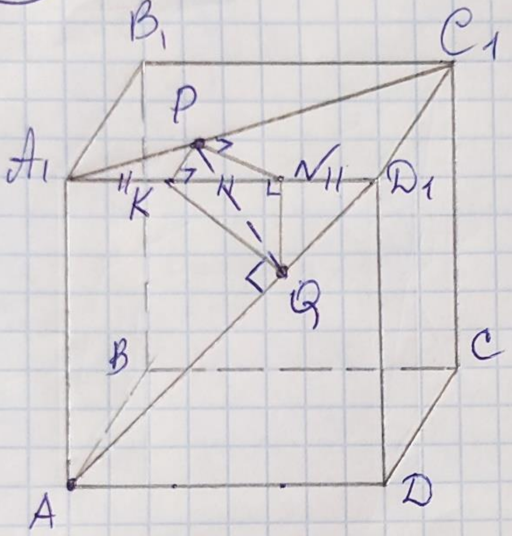
3) 4 бали. Пункт 1) + 2) + розв'язані ~~одна із~~ нерівностей системи

4) 6 балів 1) + 2) + 3) + правильно розв'язана система нерівностей, проте є невеликі огріхи в записах і розв'язків

5) 7 балів. Повне правильне розв'язання

Завдання 4

№4



1) Нехай a – ребро куба; PQ – спільний перпендикуляр мимобіжних прямих A_1C_1 і AD_1.

2) Проведем $PK \perp (AA_1D_1)$ і $QN \perp (A_1B_1C_1)$

$PK \perp A_1D_1$ $\quad QN \perp A_1D_1$

тоді PN – орт. проекція PQ на пл. $(A_1B_1C_1)$

QK – орт. проекція PQ на пл. (AA_1D_1)

за Т про три перпендикуляри робимо висно

$PN \perp A_1C_1$ $\quad KQ \perp AD_1$

3) ΔA_1PN і ΔD_1QK прямокутні рівнобедрені

тоді $A_1K = KN = ND_1 = \frac{a}{3}$

$NQ = ND_1 = A_1K = KP = \frac{a}{3}$

$A_1P = PN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

4) із прямокутного ΔPNQ: $PQ = \sqrt{PN^2 + NQ^2}$

$PQ = \sqrt{\frac{2a^2}{9} + \frac{a^2}{9}} = \sqrt{\frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

5) Діагональ куба $d = \sqrt{a^2+a^2+a^2}$

$d = a\sqrt{3}$

Тоді $\frac{d}{PQ} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = 3$

ч. і т. д.

Критерії оцінювання завдання №4

(спосіб побудови спільного перпендикуляра мимобіжних прямих)

0 балів - задача відсутня або розв'язана неправильно (з грубими помилками в розв'язанні та при виконанні малюнка)

1 бал - малюнок виконано правильно та правильно вказані мимобіжні діагоналі сусідніх граней куба.

2 бали - побудований спільний перпендикуляр мимобіжних прямих (PN), перпендикуляр спроектовано на площини граней, що містять мимобіжні діагоналі.

3 бали - Доведено $PN \perp A_1C_1$, $KQ \perp AD_1$.

4 бали - Доведена рівність відрізків.

$A_1K = KN = ND_1$, $NQ = ND_1 = A_1K$

5 балів - Правильно обчислено відрізки

$A_1P = PN = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

6 балів - Правильно обчислена відстань між мимобіжними прямими $PQ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

7 балів Правильно знайдено відношення

$\frac{d}{PQ} = 3$

Завдання 5

№5

Доведення

Кожна пара членів комісії могла зустрітись не більше, ніж на одному засіданні. На кожному засіданні було $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ пар.

Оскільки було 40 засідань, то із членів комісії можна утворити не менше $45 \cdot 40 = 1800$ пар.

Якщо ж членів комісії 60, то можна утворити $C_{60}^2 = \frac{60!}{2!58!} = \frac{59 \cdot 60}{2} =$ $= 1770$ пар < 1800

Тоді для 61 члена комісії:

$C_{61}^2 = \frac{61!}{2!59!} = 1830$.

Отже, членів комісії має бути більше 60.

Критерії оцінювання №5

0б. Завдання не розв'язувалось або розв'язано неправильно;

1б. Знайдено кількість учасників, задіяних на 10 конференціях

2б. Знайдено скільки пар було на кожному засіданні

3б. Правильно знайдено, скільки пар було на 40 засіданнях

4б. Знайдено кількість пар з 60и членів комісії

5б. Знайдено кількість пар з 61 члена комісії

6б Задача розв'язана але наявні незначні недоліки

7б Є повне розв'язання з правильними обчисленнями і висновками.